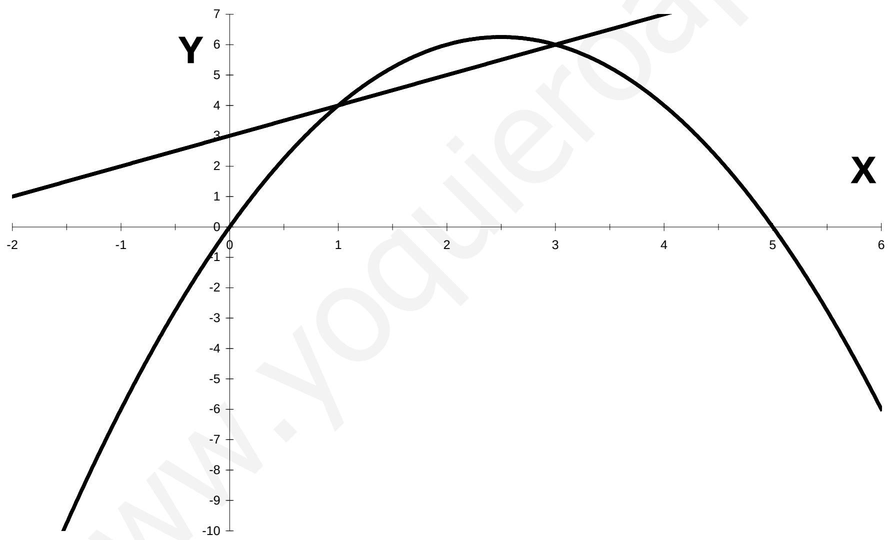
OPCIÓN A

1.- Determinar los valores de a y b para que la siguiente función sea continua en todos sus puntos: $\begin{cases} ax^2+b & si \quad x<0 \\ x-a & si \quad 0\le x<1 \\ \dfrac{a}{x}+b & si \quad 1\le x \end{cases}$

$$\begin{cases} \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=a\cdot 0^2+b=b \\ f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0-a=-a \end{cases} \Rightarrow f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-a=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=b \Rightarrow -a=b \\ \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1-a \\ f(1)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\dfrac{a}{1}+b=a+b \end{cases} \Rightarrow f(1)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=a+b=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1-a \Rightarrow a+b=1-a \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 2a+b=1 \end{cases} \Rightarrow a=1 \Rightarrow 1+b=0 \Rightarrow b=-1$$

2.- a) Dibujar el recinto plano limitado por las funciones: **f(x) = -x² + 5x** , **g(x) = x + 3**
b) Hallar su área
a)



b)

$$Puntos\ de\ corte\ entre\ funciones \Rightarrow -x^2+5x=x+3 \Rightarrow x^2-4x+3=0 \Rightarrow \Delta=(-4)^2-4\cdot 1\cdot 3=4\ge 0 \Rightarrow$$

$$x=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2\cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4+2}{2}=3 \\ x=\dfrac{4-2}{2}=1 \end{cases} \Rightarrow A=\int_1^3\left(-x^2+5x\right)dx-\int_1^3(x+3)\,dx=\int_1^3\left(-x^2+4x-3\right)dx$$

$$A=-\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_1^3+4\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_1^3-3\cdot[x]_1^3=-\frac{1}{3}\cdot\left(3^3-1^3\right)+2\cdot\left(3^2-1^2\right)-3\cdot(3-1)=-\frac{26}{3}+16-6$$

$$A=10-\frac{26}{3}=\frac{30-26}{3}=\frac{4}{3}\,u^2$$

3.- Discutir y resolver según los valores del parámetro **m**: $\begin{cases} 2x - y + z = m^2 \\ -x + 2y = 0 \\ mx - y + z = 1 \end{cases}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ m & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 1 - 2m - 1 = 4 - 2m \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow 4 - 2m = 0 \Rightarrow 2m = 4 \Rightarrow m = 2$$

$$\forall m \in \Re - \{2\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang\ (A) = 3 = Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

Solución

$$x = \frac{\begin{vmatrix} m^2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{4 - 2m} = \frac{2m^2 - 2}{2(2 - m)} = \frac{2(m^2 - 1)}{2(2 - m)} = \frac{m^2 - 1}{2 - m}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & m^2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix}}{4 - 2m} = \frac{-1 + m^2}{2(2 - m)} = \frac{m^2 - 1}{2(2 - m)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & m^2 \\ -1 & 2 & 0 \\ m & -1 & 1 \end{vmatrix}}{4 - 2m} = \frac{4 + m^2 - 2m^3 - 1}{2(2 - m)} = \frac{-2m^3 + m^2 + 3}{2(2 - m)}$$

Si $m = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 4 \\ -2 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow 0z = 3 \Rightarrow z = \frac{3}{0} \Rightarrow Sin\ solución \Rightarrow$$

Sistema Incompatible

4.- a) ¿Están alineados los puntos **A(1 , 0 , -1)** , **B(-1 , 1 , 2)** y **C(3 , 0 , 1)**?. Justifica la respuesta

b) En caso afirmativo determinar la ecuación de la recta que los contiene. En caso negativo determinar la ecuación del plano que pasa por los tres puntos

a) Los vectores AB y AC son iguales o proporcionales en caso de alineación de los tres puntos

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-1, 1, 2) - (1, 0, -1) = (-2, 1, 3) \\ \overrightarrow{AC} = (3, 0, 1) - (1, 0, -1) = (2, 0, 2) \end{cases} \Rightarrow \frac{-2}{2} \neq \frac{1}{0} \Rightarrow \textit{No están alineados}$$

b) Para hallar el plano π utilizaremos los dos vectores AB y AC hallados y el vector AG siendo G el punto generador del plano que es combinación lineal de los otros dos al ser coplanarios y, por ello, el determinante de la matriz que forman los tres es nulo y la ecuación pedida

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-1, 1, 2) - (1, 0, -1) = (-2, 1, 3) \\ \overrightarrow{AC} = (3, 0, 1) - (1, 0, -1) = (2, 0, 2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (-2, 1, 3) \\ \overrightarrow{AC} = (2, 0, 2) = (1, 0, 1) \\ \overrightarrow{AB} = (x, y, z) - (1, 0, -1) = (x-1, y, z+1) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z+1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-2y + (z+1) - (x-1) - 3y = 0 \Rightarrow -(x-1) - 5y + (z+1) = 0 \Rightarrow \pi \equiv x + 5y - z - 2 = 0$$

OPCIÓN B

1.- Representar gráficamente una función que satisfaga las siguientes condiciones

a) **f(0) = 0 ; f'(0) = 0**

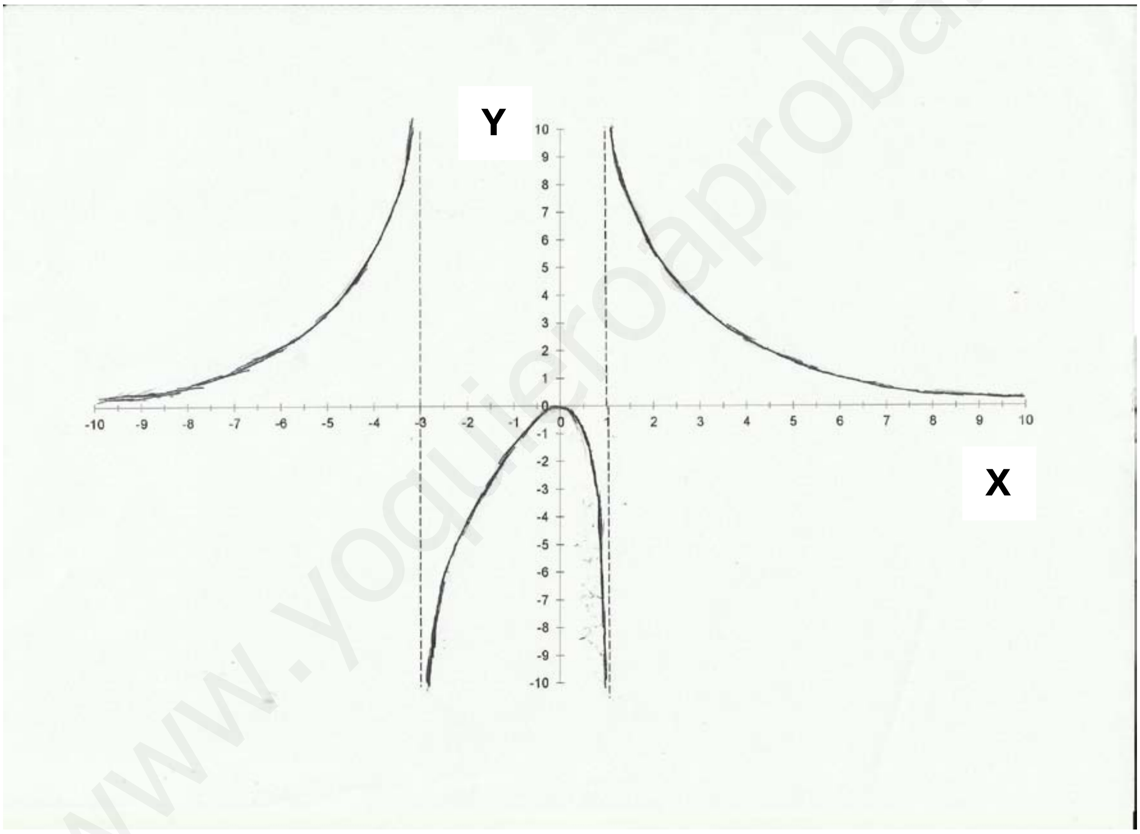
b) Asíntota vertical la recta **x = -3**

c) Creciente en $(-\infty, -3) \cup (-3, 0)$; Decrecimiento $(0, 1) \cup (1, 2)$

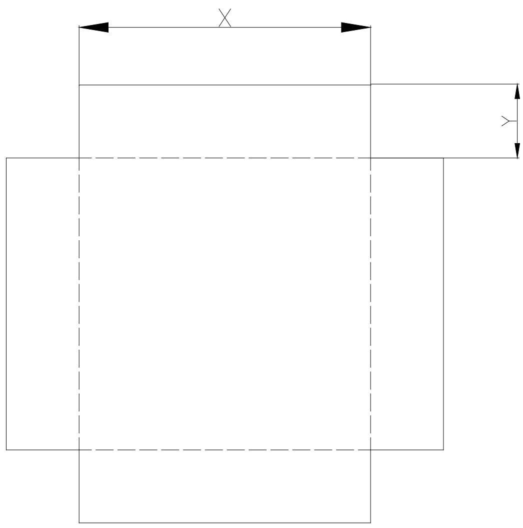
d) $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

f) Decreciente $(0, 1) \cup (1, \infty)$



2.- Hallar las dimensiones de un depósito abierto superiormente, en forma de prisma recto de base cuadrada, de **50 m³** de volumen, que tenga superficie mínima.



$$\begin{cases} 50 = X^2 Y \Rightarrow Y = \dfrac{50}{X^2} \\ S = 4XY + X^2 \end{cases} \Rightarrow S = 4X\dfrac{50}{X^2} + X^2 = \dfrac{200}{X} + X^2 \Rightarrow S' = \dfrac{dS}{dX} = -\dfrac{200}{X} + 2X = \dfrac{-200 + 2X^2}{X}$$

$$S' = 2\dfrac{X^2 - 100}{X} \Rightarrow S' = 0 \Rightarrow 2\dfrac{X^2 - 100}{X} = 0 \Rightarrow X^2 - 100 = 0 \Rightarrow X^2 = 100 \Rightarrow x = \pm\sqrt{100} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} X = 10 \\ X = -10 \Rightarrow No\ es\ solución\ por\ negativo \end{cases} \Rightarrow S'' = \dfrac{d^2 S}{dX^2} = \dfrac{200}{X^2} + 2 \Rightarrow$$

$$S''(10) = \dfrac{200}{10^2} + 2 = 4 > 0 \Rightarrow Mínimo \Rightarrow \begin{cases} X = 10\ m. \\ Y = \dfrac{50}{10^2} = \dfrac{50}{100} = \dfrac{1}{2}\ m. \end{cases}$$

3.- a) Determinar para que valor de **m** tiene inversa la matriz $\begin{pmatrix} 1 & m & 0 \\ m & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Calcular esa matriz inversa para ese valor de **m**

a) Una matriz tiene inversa siempre que su determinante no sea nulo. Llamando a la matriz **A**

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & m & 0 \\ m & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1-2m-m^2 \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow -1-2m-m^2 = 0 \Rightarrow m^2+2m+1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta = 2^2 - 4\cdot 1\cdot 1 = 0 \geq 0 \Rightarrow m = \frac{-2}{2} = -1$$

$$(Para\ todo)\ \forall m \in \Re - \{-1\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow Existe\ \exists C$$

b)

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\cdot\left(adj\ A^t\right) \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & m & 1 \\ m & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow adj\ A^t = \begin{pmatrix} -1 & -m & -2m \\ 2-m & 1 & 2 \\ 1 & m & -1-m^2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{(m+1)^2}\cdot\begin{pmatrix} -1 & -m & -2m \\ 2-m & 1 & 2 \\ 1 & m & -1-m^2 \end{pmatrix}$$

4.- Hallar la ecuación del plano que contiene al punto **A(0 , -2 , 4)** y a la recta de ecuación:
$$\frac{x+1}{2} = y-3 = \frac{z+2}{-2}$$

Para determinar la ecuación del plano π tomaremos el vector director de la recta, el vector determinado por el punto **A** y un punto **R** cualquiera de la recta (tomaremos el indicado en su ecuación) y el vector que forman **A** y **G**, siendo este punto el genérico del plano. Estos tres vectores son coplanarios y el último es combinación lineal de los otros dos, por es razón el determinante de la matriz que forman es nulo y la ecuación que se pide

$$R(-1\ ,3\ ,-2)$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (2\ ,1\ ,-2) \\ \overrightarrow{AR} = (-1\ ,3\ ,-2)-(0\ ,-2\ ,4) = (-1\ ,5\ ,-6) \\ \overrightarrow{AG} = (x\ ,y\ ,z)-(0\ ,-2\ ,4) = (x\ ,y+2\ ,z-4) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y+2 & z-4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & -6 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-6x+2\,(y+2)+10\,(z-4)+(z-4)+10x+12\,(y+2) = 0 \Rightarrow 4x+14\,(y+2)+11\,(z-4) = 0$$

$$\pi \equiv 4x+14y+11z-16 = 0$$