OPCIÓN A

1.- Hallar el área encerrada por la gráfica de la función **f(x) = x³ – 4x² + 5x - 2** y las rectas **y = 0**, **x = 1** y **x = 3**

$$Puntos\ de\ corte\ con\ OX \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow x^3-4x^2+5x-2=0 \Rightarrow Por\ Ruffini$$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -4 & 5 & -2 \\ 1 & & 1 & -3 & 2 \\ \hline & 1 & -3 & 2 & \underline{|0} \end{array} \Rightarrow (x-1)(x^2-3x+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ x^2-3x+2=0 \Rightarrow \Delta=(-3)^2-4\cdot1\cdot2=1\geq0 \end{cases}$$

$$x=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2\cdot1} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=\frac{3}{2} \Rightarrow f(x)=\left(\frac{3}{2}\right)^3-4\left(\frac{3}{2}\right)^2+5\left(\frac{3}{2}\right)-2=\frac{27}{8}-\frac{36}{4}+\frac{15}{2}-2=\frac{27-72+60-16}{8}=-\frac{1}{8} \Rightarrow Negativo \\ x=\frac{5}{2} \Rightarrow f(x)=\left(\frac{5}{2}\right)^3-4\left(\frac{5}{2}\right)^2+5\left(\frac{5}{2}\right)-2=\frac{125}{8}-\frac{100}{4}+\frac{25}{2}-2=\frac{125-200+100-16}{8}=\frac{9}{8} \Rightarrow Positivo \end{cases}$$

$$A=\left|\int_1^2\left(x^3-4x^2+5x-2\right)dx\right|+\int_2^3\left(x^3-4x^2+5x-2\right)dx$$

$$A=\int_1^2\left(-x^3+4x^2-5x+2\right)dx+\frac{1}{4}\cdot\left[x^4\right]_2^3-4\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_2^3+5\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_2^3-2\cdot\left[x\right]_2^3$$

$$A=-\frac{1}{4}\cdot\left[x^4\right]_1^2+4\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_1^2-5\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_1^2+2\cdot\left[x\right]_1^2+\frac{1}{4}\left(3^4-2^4\right)-\frac{4}{3}\left(3^3-2^3\right)+\frac{5}{2}\left(3^2-2^2\right)-2\cdot(3-2)$$

$$A=-\frac{1}{4}\left(2^4-1^4\right)+\frac{4}{3}\left(2^3-1^3\right)-\frac{5}{2}\left(2^2-1^2\right)+2\cdot(2-1)+\frac{1}{4}(81-16)-\frac{4}{3}(27-8)+\frac{5}{2}(9-4)-2\cdot1$$

$$A=-\frac{1}{4}(16-1)+\frac{4}{3}(8-1)-\frac{5}{2}(4-1)+2\cdot1+\frac{65}{4}-\frac{4}{3}\cdot19+\frac{5}{2}\cdot5-2=-\frac{15}{4}+\frac{28}{3}-\frac{15}{2}+2+\frac{65}{4}-\frac{76}{3}+\frac{25}{2}-2$$

$$A=\frac{50}{4}-\frac{48}{3}+\frac{10}{2}=\frac{25}{2}-\frac{48}{3}+\frac{10}{2}=\frac{35}{2}-\frac{48}{3}=\frac{105-96}{6}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}\,u^2$$

2.- Una empresa ha decidido mejorar su seguridad instalando 9 alarmas. Un especialista en el tema señalado que dada la estructura de la empresa solo puede optar por dos tipos de alarmas, de tipo **A** o de tipo **B**; además, afirma que la seguridad de la empresa se puede expresar como la décima parte del producto entre el número de alarmas de tipo A instaladas y el cuadrado del número de alarmas instaladas de tipo **B.** ¿Cuántas alarmas de cada tipo se deben de instalar en la empresa para maximizar la seguridad?

$$\begin{cases} A+B=9 \Rightarrow A=9-B \\ S=\frac{1}{10}\cdot AB^2 \end{cases} \Rightarrow S=\frac{1}{10}\cdot(9-B)B^2 \Rightarrow S'=\frac{dS}{dB}=\frac{1}{10}\cdot\left[-B^2+2B\cdot(9-B)\right]\Rightarrow$$

$$S'=\frac{1}{10}\cdot\left(-B^2+18B-2B^2\right)=\frac{1}{10}\cdot\left(-3B^2+18B\right)\Rightarrow S'=0\Rightarrow\frac{3B}{10}\cdot(-B+6)=0\Rightarrow\begin{cases} B=0 \\ -B+6=0\Rightarrow B=6 \end{cases}$$

$$S''=\frac{3}{10}\cdot\left[(-B+6)-B\right]=\frac{3}{10}\cdot(6-2B)\Rightarrow\begin{cases} S''(0)=\frac{3}{10}\cdot(6-2\cdot0)=\frac{18}{10}=\frac{9}{5}>0\Rightarrow Mínimo \\ S''(6)=\frac{3}{10}\cdot(4-2\cdot6)=-\frac{24}{10}=-\frac{12}{5}<0\Rightarrow Máximo \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} B=4 \\ A=5 \end{cases}$$

3.- a) Para que valores del parámetro **k** admite inversa la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & k \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **[1 punto]**

b) Calcular $\mathbf{A^{-1}}$ en función de **k [1'25 puntos]**

a)
Para que admita inversa una matriz la condición necesaria es que su determinante no sea nulo

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & k \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - k + 2 = 4 - k \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow 4 - k = 0 \Rightarrow k = 4$$

$$(Para\ todo)\forall k \in \Re - \{4\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow Existe\ A^{-1}$$

$b)$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \left(adj\ A^t\right) \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & k & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow adj\ A^t = \begin{pmatrix} 2-k & -4 & 2k \\ 2 & 2 & -k \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4-k} \cdot \begin{pmatrix} 2-k & -4 & 2k \\ 2 & 2 & -k \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

4.- a) Comprueba que las rectas $\begin{cases} r \equiv (x, y, z) = (1, 2, -1) + \lambda(1, 0, -1) \\ s \equiv (x, y, z) = (0, 3, 1) + \mu(-2, 1, 3) \end{cases}$ se cortan en un punto **[1 punto]**

b) Hallar la ecuación del plano que contiene a las rectas dadas en el apartado anterior hallando el punto de intersección en caso de que se corten **[1'25 puntos]**

$a)$

$$\begin{cases} 1 + \lambda = -2\mu \\ 2 = 3 + \mu \\ -1 - \lambda = 1 + 3\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda + 2\mu = -1 \Rightarrow \lambda + 2 \cdot (-1) = -1 \Rightarrow \lambda = 1 \\ \mu = -1 \\ \lambda + 3\mu = -2 \Rightarrow \lambda + 3 \cdot (-1) = -2 \Rightarrow \lambda = 1 \end{cases} \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Determinado$$

$$Punto\ de\ corte \Rightarrow P = (1, 2, -1) + 1 \cdot (1, 0, -1) \Rightarrow P(2, 2, -2)$$

b) Para hallar el plano π utilizaremos los dos vectores directores de las rectas y el vector formado por el punto P de intersección de las rectas y el punto G generador del plano que es combinación lineal de los otros dos al ser coplanarios y, por ello, el determinante de la matriz que forman es nulo y la ecuación pedida

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (1, 0, -1) \\ \overrightarrow{v_s} = (-2, 1, 3) \\ \overrightarrow{PG} = (x, y, z) - (2, 2, -2) = (x-2, y-2, z+2) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z+2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$2(y-2) + (z+2) + (x-2) - 3(y-2) = 0 \Rightarrow (x-2) - (y-2) + (z+2) = 0 \Rightarrow \pi \equiv x - y + z + 2 = 0$$

OPCIÓN B

1.- Representar una función que cumple las condiciones

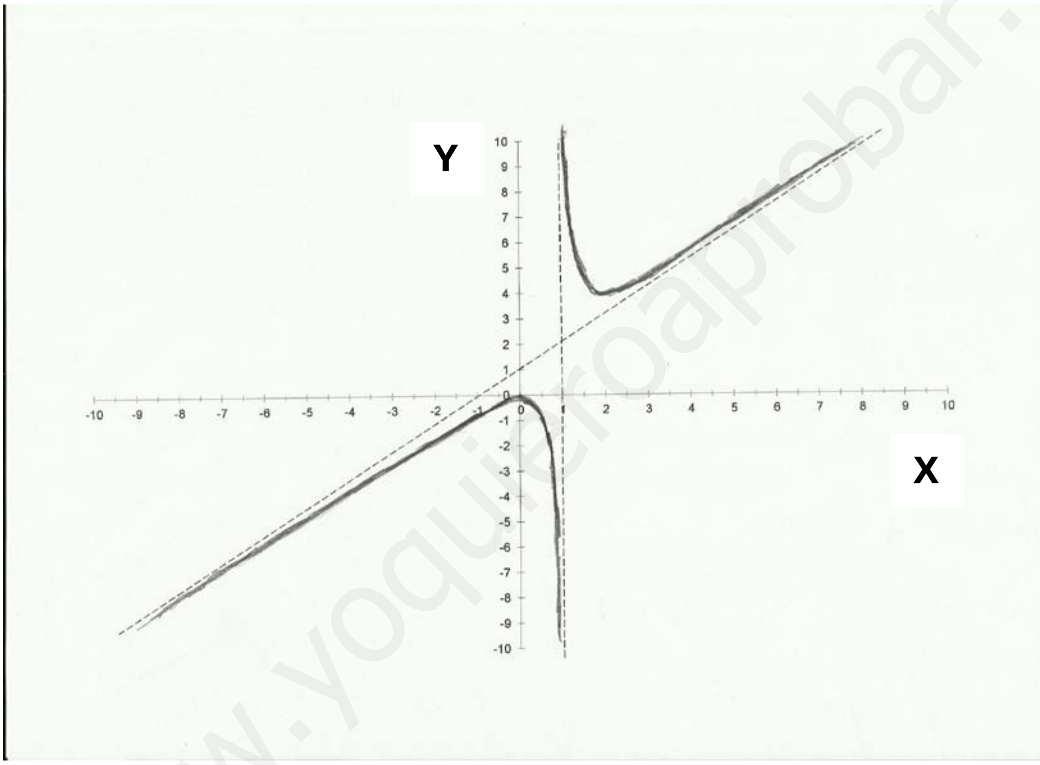
i) $Dom(f) = \Re - \{1\}$

ii) Puntos de corte: **P(0 , 0)**

iii) Crecimiento $(-\infty, 0] \cup (2, \infty)$; Decrecimiento $(0, 1) \cup (1, 2)$; Máximo en **(0 , 0)** ;

Mínimo en **(2 , 4)**

iv) Asíntota vertical: **x = 1 ,** $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$, Asíntota oblicua: **y = x + 1**



2.- Calcular el área encerrada entre la curva **y = e^x** y la cuerda de la misma que tiene por extremos los puntos de abcisa **x = 0** y **x = 1**

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = e^0 = 1 \\ x = 1 \Rightarrow y = e^1 = e \end{cases} \Rightarrow m = \frac{e-1}{1-0} = e - 1 \Rightarrow y - 1 = (e-1)(x-0) \Rightarrow y = (e-1)x + 1$$

$$A = \int_0^1 [(e-1)x + 1]\,dx - \int_0^1 e^x dx = (e-1)\frac{1}{2}\left[x^2\right]_0^1 + \left[x\right]_0^1 - \left[e^x\right]_0^1 = \frac{e-1}{2}\cdot\left(1^2 - 0^2\right) + (1-0) - \left(e^1 - e^0\right)$$

$$A = \int_0^1 [(e-1)x + 1]\,dx - \int_0^1 e^x dx = \frac{e-1}{2} + 1 - (e-1) = 1 - \frac{e-1}{2} = \frac{2-e+1}{2} = \frac{3-e}{2}\, u^2$$

3.- a) Discute el siguiente sistema según los valores del parámetro **k** $\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ x+ky+3z=2 \\ 2x+(2+k)y+6z=3 \end{cases}$

[1’25 puntos]
b) Resolverlo para **k = 0 [1 punto]**

a)

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & k & 3 \\ 2 & 2+k & 6 \end{vmatrix}=6k+12+3\,(2+k)-6k-3\,(2+k)-12=0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & k & 3 & 2 \\ 2 & 2+k & 6 & 3 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & k-2 & 0 & 1 \\ 0 & k-2 & 0 & 1 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & k-2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow k-2=0\Rightarrow k=2$$

$(Para\ todo)\forall k\in\Re-\{2\}\Rightarrow rang(A)=rang(A/B)=2\neq Número\ de\ incognitas\Rightarrow$
$Sistema\ Compatible\ Indeterminado$
$Cuando\ k=2\Rightarrow rang(A)=1\neq rang(A/B)=2\Rightarrow Sistema\ Incompatible$

$b\,)Si\ k=0\Rightarrow Sistema\ Compatible\ Indeterminado$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 3 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow -2y=1\Rightarrow y=-\frac{1}{2}\Rightarrow x+2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+3z=1\Rightarrow$$

$$x-1+3z=1\Rightarrow x=2-3z\Rightarrow Solución\Rightarrow(x\,,y\,,z)=\left(2-3\lambda\,,-\frac{1}{2}\,,\lambda\right)$$

4.- a) Estudiar, según los valores del parámetro λ, la posición relativa de los siguientes planos:

$$\begin{cases} \lambda x - 2y + \lambda z = 0 \\ 10x - y + 5z = 0 \\ 4x + 3y - z = 0 \end{cases}$$ **[1'25 puntos]**

b) Hallar la ecuación del plano que pasa por los puntos **(0 , 1 , 2)** , **(1 , 0 , 3)** y **(2 , -1 , 0)** **[1 punto]**

a) Como el sistema que forman es homogéneo puede ser Compatible Determinado (y la solución el corte en el origen de coordenadas) cuando el determinante de la matriz de los coeficientes no es nula y Compatible Indeterminado, si ese determinante es nulo siendo tres planos que se cortan en una recta común

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & -2 & \lambda \\ 10 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \lambda - 40 + 30\lambda + 4\lambda - 15\lambda - 20 = 20\lambda - 60 \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow 20\lambda - 60 = 0 \Rightarrow \lambda = 3$$

$$\forall \lambda \in \Re - \{3\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3 = \text{Número de incognitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$$

$$\text{Solución} \Rightarrow (x\ , y\ , z) = (0\ , 0\ , 0)$$

$$Si\ k = 3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 3 & 0 \\ 10 & -1 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 3 & 0 \\ -30 & 3 & -15 & 0 \\ -12 & -9 & 3 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -17 & 15 & 0 \\ 0 & -17 & 15 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -17 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow -17y + 15z = 0 \Rightarrow$$

$$17y = 15z \Rightarrow y = \frac{15}{17}z \Rightarrow 3x - 2 \cdot \frac{15}{17}z + 3z = 0 \Rightarrow 3x = \frac{30}{17}z - 3z \Rightarrow 3x = \frac{30-51}{17}z \Rightarrow 3x = -\frac{21}{17}z \Rightarrow$$

$$x = -\frac{3}{17}z \Rightarrow \text{Los tres planos tienen una recta común} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -\frac{3}{17}\mu \\ y = \frac{15}{17}\mu \\ z = \mu \end{cases}$$

b) Los puntos que denominaremos A, B y C respectivamente forman los vectores AB, AC y AG, siendo G el punto genérico del plano π, como son coplanarios este último vector es combinación de los otros dos y por lo tanto el determinante de la matriz que forman es nulo y la ecuación del plano que se pide.

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (1\ , 0\ , 3) - (0\ , 1\ , 2) = (1\ , -1\ , 1) \\ \overrightarrow{AC} = (2\ , -1\ , 0) - (0\ , 1\ , 2) = (2\ , -2\ , -2) \equiv (-1\ , 1\ , 1) \\ \overrightarrow{AG} = (x\ , y\ , z) - (0\ , 1\ , 2) = (x\ , y-1\ , z-2) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$-x - (y-1) + (z-2) - (z-2) - x - (y-1) = 0 \Rightarrow -2x - 2(y-1) = 0 \Rightarrow x + (y-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv x + y - 1 = 0$$