Opción A

1..- Resolver: $\displaystyle\int \frac{2x}{x^3-3x^2-x+3}\,dx$

$$x^3-3x^2-x+3=0 \Rightarrow Por\ Ruffini \Rightarrow (x-1)\left(x^2-2x-3\right)=0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -3 & -1 & 3 \\ 1 & & 1 & -2 & -3 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & \underline{|0} \end{array} \qquad x^2-2x-3=0 \Rightarrow \Delta=(-2)^2-4\cdot 1\cdot(-3)=4+12=16\geq 0 \Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2\cdot 1}$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{2+4}{2}=3 \\ x=\dfrac{2-4}{2}=-1 \end{cases} \Rightarrow x^3-3x^2-x+3=(x-1)(x-3)(x+1)$$

$$\frac{2x}{x^3-3x^2-x+3}=\frac{2x}{(x-1)(x-3)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3}+\frac{C}{x+1}=$$

$$=\frac{A(x-3)(x+1)+B(x-1)(x+1)+C(x-1)(x-3)}{(x-1)(x-3)(x+1)}\Rightarrow$$

$$A(x-3)(x+1)+B(x-1)(x+1)+C(x-1)(x-3)=2x\Rightarrow$$

$$\begin{cases} x=3\Rightarrow A(3-3)(3+1)+B(3-1)(3+1)+C(3-1)(3-3)=2\cdot 3\Rightarrow 8B=6\Rightarrow B=\dfrac{6}{8}=\dfrac{3}{4} \\ x=1\Rightarrow A(1-3)(1+1)+B(1-1)(1+1)+C(1-1)(1-3)=2\cdot 1\Rightarrow -4A=2\Rightarrow A=-\dfrac{2}{4}=-\dfrac{1}{2} \\ x=-1\Rightarrow A(-1-3)(-1+1)+B(-1-1)(-1+1)+C(-1-1)(-1-3)=2\cdot(-1)\Rightarrow 8C=-2\Rightarrow C=-\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$$\frac{2x}{x^3-3x^2-x+3}=\frac{-\frac{1}{2}}{x-1}+\frac{\frac{3}{4}}{x-3}+\frac{-\frac{1}{4}}{x+1}$$

$$I=\int\frac{2x}{x^3-3x^2-x+3}\,dx=-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{3}{4}\int\frac{dx}{x-3}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1}=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}+\frac{3}{4}\int\frac{du}{u}-\frac{1}{4}\int\frac{dr}{r}=$$

$$\begin{cases} x-1=t\Rightarrow dx=dt \\ x-3=u\Rightarrow dx=du \\ x+1=r\Rightarrow dx=dr \end{cases}$$

$$I=\int\frac{2x}{x^3-3x^2-x+3}\,dx=-\frac{1}{2}\ln t+\frac{3}{4}\ln u-\frac{1}{4}\ln r=\ln\frac{u^{\frac{3}{4}}}{t^{\frac{2}{4}}\cdot r^{\frac{1}{4}}}=\ln\sqrt[4]{\frac{(x-3)^3}{(x-1)^2(x+1)}}+K$$

2.- La potencia **f(x)** en watios consumida por cierto aparato eléctrico, en función de su resistencia **(x)** en ohmios viene dada por la expresión $f(x)=\dfrac{4x}{(x+12)^2}$

Hallar la potencia máxima y el correspondiente valor de **x**

$$f'(x)=\frac{df(x)}{dx}=4\,\frac{(x+12)^2-2\,(x+12)\,x}{(x+12)^4}=4\,\frac{(x+12)-2x}{(x+12)^3}=4\,\frac{12-x}{(x+12)^3}\Rightarrow f'(x)=0\Rightarrow 12-x=0\Rightarrow x=12$$

$$f''(x)=\frac{d^2f(x)}{dx^2}=4\,\frac{-(x+12)^3-3\,(x+12)^2(12-x)}{(x+12)^6}=4\,\frac{-(x+12)-3\,(12-x)}{(x+12)^4}=4\,\frac{-x-12-36+3x}{(x+12)^4}$$

$$f''(x)=\frac{d^2f(x)}{dx^2}=4\,\frac{2x-48}{(x+12)^4}\Rightarrow f''(12)=4\,\frac{2\cdot 12-48}{(12+12)^4}=4\,\frac{24-48}{24^4}=4\,\frac{-24}{24^4}=-\frac{4}{24^3}<0\Rightarrow \text{Máximo}$$

$$\begin{cases} x=12\ \text{ohmios} \\ f(12)=\dfrac{4\cdot 12}{(12+12)^2}=\dfrac{48}{24^2}=\dfrac{2}{24}=\dfrac{1}{12}\ \text{watios}\end{cases}$$

3.- Resolver el siguiente sistema matricial $\begin{cases} 2A+3B=\begin{pmatrix}4 & 8\\ 7 & 11\end{pmatrix} \\ 5A-2B=\begin{pmatrix}10 & 1\\ 8 & 18\end{pmatrix}\end{cases}$

$$\begin{cases} 4A+6B=2\cdot\begin{pmatrix}4 & 8\\ 7 & 11\end{pmatrix} \\ 15A-6B=3\cdot\begin{pmatrix}10 & 1\\ 8 & 18\end{pmatrix}\end{cases}\Rightarrow 19A=\begin{pmatrix}8 & 16\\ 14 & 22\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}30 & 3\\ 24 & 54\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}38 & 19\\ 38 & 76\end{pmatrix}\Rightarrow A=\frac{1}{19}\cdot\begin{pmatrix}38 & 19\\ 38 & 76\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 10A+15B=5\cdot\begin{pmatrix}4 & 8\\ 7 & 11\end{pmatrix} \\ -10A+4B=(-2)\cdot\begin{pmatrix}10 & 1\\ 8 & 18\end{pmatrix}\end{cases}\Rightarrow 19B=\begin{pmatrix}20 & 40\\ 35 & 55\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}20 & 2\\ 16 & 36\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 38\\ 19 & 19\end{pmatrix}\Rightarrow B=\frac{1}{19}\cdot\begin{pmatrix}0 & 38\\ 19 & 19\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

4.- Estudiar la posición relativa de las rectas **r** y **s.** En caso de que se corten en un punto hallar las coordenadas del mismo $r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{1}$, $s \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = \lambda - 8 \\ z = -\lambda - 1 \end{cases}$

a) Analizaremos si los vectores directores son iguales o proporcionales, de serlo estudiaremos si tienen punto común si es afirmativo las rectas son coincidentes sino paralelas.
Si no hay igualdad o proporcionalidad buscaremos si tienen un punto común, si eso sucede son rectas secantes o que se cortan en un punto.
De no darse ninguno de los supuestos anteriores las rectas se cruzan

$$\begin{cases} r \equiv \begin{cases} x = 1 - \alpha \\ y = -2 + 2\alpha \\ z = \alpha \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} x = -\lambda \\ y = -8 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (-1\ ,2\ ,1) \\ \overrightarrow{v_s} = (-1\ ,1\ ,-1) \end{cases} \Rightarrow \frac{-1}{-1} \neq \frac{2}{1} \Rightarrow \textit{No son paralelas ni coincidentes}$$

Veamos si tienen un punto P común

$$\begin{cases} 1 - \alpha = -\lambda \\ -2 + 2\alpha = -8 + \lambda \\ \alpha = -1 - \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda - \alpha = -1 \\ \lambda - 2\alpha = 6 \\ \lambda + \alpha = -1 \end{cases} \Rightarrow 2\lambda = -2 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow -1 - \alpha = -1 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow -1 - 2 \cdot 0 = 6 \Rightarrow$$

$$-1 \neq 6 \Rightarrow \textit{Sistema Incompatible} \Rightarrow \textit{Las rectas se cruzan}$$

Opción B

1..- Para que valor de **a** la recta **ax + y = Ln (3)** es tangente a la curva $f(x) = Ln\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)$ en el punto de abcisa **x = 0**

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x+2}{x+1}} \cdot \frac{x+1-(x+2)}{(x+1)^2} = \frac{x+1}{x+2} \cdot \frac{x+1-x-2}{(x+1)^2} = \frac{-1}{(x+1)(x+2)}$$

$$\left\{\begin{array}{l} f(0) = Ln\left(\dfrac{0+2}{0+1}\right) = Ln\ 2 \\ m = f'(0) = \dfrac{-1}{(0+1)(0+2)} = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow y - Ln\ 2 = -\frac{1}{2}\cdot(x-0) \Rightarrow y + \frac{1}{2}x = Ln\ 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

Supongo que hay **un error en el enunciado del problema** ya que debia de ser **ax + y = Ln (2)**

2.- Calcular $\int_0^1 (x^2+5)e^{-x}dx$

$$I = \int_0^1 (x^2+5)e^{-x}\ dx = \left[-(x^2+5)e^{-x}\right]_0^1 - 2\int_0^1 x(-e^{x})\,dx = -\left[(1^2+5)e^{-1} - (0^2+5)e^0\right] + 2\int_0^1 x\ e^{-x}\ dx$$

$$\left\{\begin{array}{l} x^2+5 = u \Rightarrow 2x\ dx = du \\ e^{-x}\ dx = dx \Rightarrow v = \int e^{-x}\ dx = -\int e^{t}\ dt = -e^{t} = -e^{-x} \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x = u \Rightarrow dx = du \\ e^{-x}\ dx = dx \Rightarrow v = \int e^{-x}\ dx = -e^{-x} \end{array}\right.$$

$$-x = t \Rightarrow dx = -dt$$

$$I = \int_0^1 (x^2+5)e^{-x}\ dx = -(6e^{-1} - 5\cdot 1) + 2\left\{\left[-xe^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 (-e^{-x})\,dx\right\} = 5 - \frac{6}{e} - 2\cdot(1\cdot e^{-1} - 0\cdot e^0) + 2\int_0^1 e^{-x}\ dx$$

$$I = 5 - \frac{6}{e} - 2\cdot\left(\frac{1}{e} - 0\right) + 2\cdot\left[-e^{-x}\right]_0^1 = 5 - \frac{6}{e} - \frac{2}{e} - 2(e^{-1} - e^0) = 5 - \frac{6}{e} - \frac{2}{e} - \frac{2}{e} + 2 = 7 - \frac{10}{e} = \frac{7e-10}{e}\ u^2$$

3.- Hallar el valor de **k** para que la matriz $\begin{pmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ -k & 1 & 2 & 3 \\ -k & -k & 0 & -1 \\ -k & -k & -k & -1 \end{pmatrix}$

a) No tenga inversa
b) Tenga rango **3**

Para no tener inversa el determinante de la matriz es nulo

$$|A| = \begin{vmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ -k & 1 & 2 & 3 \\ -k & -k & 0 & -1 \\ -k & -k & -k & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & -k-4 & -5 & -5 \\ 0 & -k-4 & -k-5 & -5 \end{vmatrix} = (-k)\cdot\begin{vmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -k-4 & -5 & -5 \\ -k-4 & -k-5 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= (-3)\cdot(-k)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -k-4 & -5 & -5 \\ -k-4 & -k-5 & -5 \end{vmatrix} = 3k\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & k-1 & k-1 \\ 0 & -1 & k-1 \end{vmatrix} = 3k\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} k-1 & k-1 \\ -1 & k-1 \end{vmatrix} = 3k\left[(k-1)^2 + k - 1\right] =$$

$$= 3k\left(k^2 - 2k + 1 + k - 1\right) = 3k\left(k^2 - k\right) = 3k^2(k-1) \Rightarrow Si\ A = 0 \Rightarrow 3k^2(k-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k^2 = 0 \Rightarrow k = 0 \\ k - 1 = 0 \Rightarrow k = 1 \end{cases}$$

$$No\ tiene\ inversa\ \ para\ k = 0\ \ y\ k = 1$$

$b)$

$$\begin{pmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ -k & 1 & 2 & 3 \\ -k & -k & 0 & -1 \\ -k & -k & -k & -1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \\ 0 & -k-4 & -5 & -5 \\ 0 & -k-4 & -k-5 & -5 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -k-4 & -5 & -5 \\ 0 & -k-4 & -k-5 & -5 \end{pmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{pmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & k-1 & k-1 \\ 0 & 0 & -1 & k-1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & k-1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -k & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$Cuando\ k = 0 \Rightarrow rang(A) = 3$$
$$Cuando\ k \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 4$$

4.- Halla la ecuación implícita del plano que pasa por el punto **A(0 , -1 , 0)** paralelo a las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 3 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 \\ z = -t - 3 \end{cases}$$

El vector director del plano buscado π es perpendicular a las dos rectas y lo hallaremos calculando el producto vectorial de los vectores directores de dichas rectas.
Una vez hallado, este vector es perpendicular al vector determinado por el punto A por donde pasa y por el punto **G** que es el que genera el plano y, debido a ello el producto escalar de ambos es nulo y la ecuación del plano que se pide

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (-1, -1, 0) \equiv (1, 1, 0) \\ \overrightarrow{v_s} = (-1, 0, -1) \equiv (1, 0, 1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} = \overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{k} - \vec{j} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} = (1, -1, -1) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = (1, -1, -1) \\ \overrightarrow{AG} = (x, y, z) - (0, -1, 0) = (x, y+1, z) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \perp \overrightarrow{AG} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \cdot \overrightarrow{AG} = 0 \Rightarrow$$

$$(1, -1, -1) \cdot (x, y+1, z) = 0 \Rightarrow x - y - 1 - z = 0 \Rightarrow \pi \equiv x - y - z - 1 = 0$$