BLOQUE 1

1.A.- Para la función dada por: $f(x)=\begin{cases}(\alpha x^2+\beta x+\gamma)\cdot e^{-x+1} & si \quad x>1\\ sen\,(x-1) & si \quad x\le 1\end{cases}$ Encontrar los valores de $\alpha,\beta\ y\ \gamma$ que hacen que f(x) sea continua, y admita primera y segunda derivada en el punto **x = 1 [2'5 puntos]**

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=(\alpha\cdot 1^2+\beta\cdot 1+\gamma)\cdot e^{-1+1}=(\alpha+\beta+\gamma)\cdot e^0=(\alpha+\beta+\gamma)\cdot 1=\alpha+\beta+\gamma\\ f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=sen\,(1-1)=sen\,0=0\end{cases}\Rightarrow \alpha+\beta+\gamma=0$$

$$f'(x)=\begin{cases}(-1)(2\alpha x+\beta)\cdot e^{-x+1} & si \quad x>1\\ cos\,(x-1) & si \quad x<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+} f'(x)=-(2\alpha\cdot 1+\beta)\cdot e^{-1+1}=-(2\alpha+\beta)\cdot e^0=-2\alpha-\beta\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f'(x)=cos\,(1-1)=cos\,0=1\end{cases}\Rightarrow$$

$$-2\alpha-\beta=1\Rightarrow 2\alpha+\beta=-1$$

$$f''(x)=\begin{cases}2\alpha\cdot e^{-x+1} & si \quad x>1\\ -sen\,(x-1) & si \quad x<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^+} f''(x)=2\alpha\cdot e^{-1+1}=2\alpha\cdot e^0=2\alpha\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f''(x)=-sen\,(1-1)=-sen\,0=0\end{cases}\Rightarrow 2\alpha=0\Rightarrow\alpha=0\Rightarrow$$

$$\begin{cases}2\cdot 0+\beta=-1\Rightarrow\beta=-1\\ 0-1+\gamma=0\Rightarrow\gamma=1\end{cases}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}(-x+1)\cdot e^{-x+1} & si \quad x>1\\ sen\,(x-1) & si \quad x\le 1\end{cases}$$

1.B- Dada la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ determinar los valores de **a**, **b**, **c** y **d** para que se cumplan las siguientes condiciones: 1º) Que la recta tangente a la gráfica de **f** en el punto **(0 , 2)** sea paralela a la recta **y + 1 = 0**, y 2º) Que la recta **x – y – 2 = 0** sea tangente a la gráfica de f en el punto **x = 1 [2'5 puntos]**

$$\begin{cases}y=-1\Rightarrow m=0\\ y=x-2\Rightarrow m=1\end{cases}\Rightarrow 1-y-2=0\Rightarrow y=-1\Rightarrow(1\,,-1)$$

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c\Rightarrow\begin{cases}f(0)=2\Rightarrow a\cdot 0^3+b\cdot 0^2+c\cdot 0+d=2\Rightarrow d=2\\ f(1)=-1\Rightarrow a\cdot 1^3+b\cdot 1^2+c\cdot 1+d=-1\Rightarrow a+b+c+2=-1\\ f'(0)=0\Rightarrow 3a\cdot 0^2+2b\cdot 0+c=0\Rightarrow c=0\\ f'(1)=1\Rightarrow 3a\cdot 1^2+2b\cdot 1+0=1\Rightarrow 3a+2b=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a+b=-3\\ 3a+2b=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2a-2b=6\\ 3a+2b=1\end{cases}\Rightarrow a=7\Rightarrow 7+b=-3\Rightarrow b=-10\Rightarrow f(x)=7x^3-10x^2$$

BLOQUE 2

2.A.- Calcular el valor de a para que la región plana encerrada entre la parábola **y = x²** y la recta **y = a** sea el doble del área de la región limitada por dicha parábola y la recta **y = 1**
[2'5 puntos]

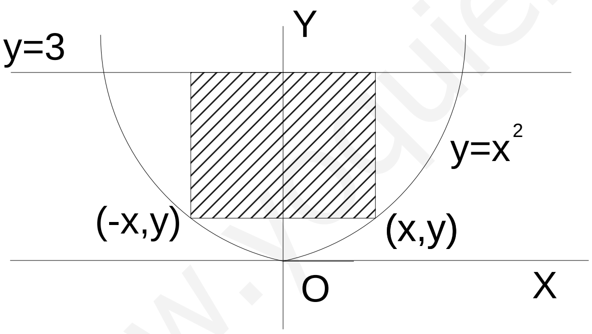
$$\text{Puntos de corte entre funciones} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases} \\ x^2 = a \Rightarrow x = \pm\sqrt{a} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{a} \\ x = -\sqrt{a} \end{cases} \end{cases} \Rightarrow y = x^2 \Rightarrow \text{Es simétrica}$$

$$2\int_0^{\sqrt{a}} a\,dx - 2\int_0^{\sqrt{a}} x^2\,dx = 2\cdot\left[2\int_0^1 1\,dx - 2\int_0^1 1\,dx\right] \Rightarrow 2a\cdot[x]_0^{\sqrt{a}} - 2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_0^{\sqrt{a}} = 4\cdot[x]_0^1 - 4\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_0^1$$

$$2a\cdot\left(\sqrt{a}-0\right) - \frac{2}{3}\left[\left(\sqrt{a}\right)^3 - 0^3\right] = 4\cdot(1-0) - 2\cdot\left(1^3 - 0^3\right) \Rightarrow 2a\sqrt{a} - \frac{2}{3}a\sqrt{a} = 4 - 2 \Rightarrow \frac{2}{3}a\sqrt{a} = 2 \Rightarrow$$

$$a\sqrt{a} = 3 \Rightarrow (a)^{\frac{3}{2}} = 3 \Rightarrow a = 3^{\frac{2}{3}} \Rightarrow a = \sqrt[3]{3^2} \Rightarrow a = \sqrt[3]{9}$$

2.B.- Considérese el recinto limitado por la curva **y = x²** y la recta **y = 3**



De entre los rectángulos situados como en la figura anterior, determinan el que tiene área máxima **[2'5 puntos]**

$$\begin{cases} y = x^2 \\ A = 2x\cdot(3-y) \end{cases} \Rightarrow A = 2x\cdot\left(3-x^2\right) = 6x - 2x^3 \Rightarrow A' = \frac{dA}{dx} = 6 - 6x^2 = 6\left(1-x^2\right) \Rightarrow A' = 0 \Rightarrow 6\left(1-x^2\right) = 0$$

$$1 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \Rightarrow \text{No es solución} \end{cases} \Rightarrow A'' = \frac{d^2A}{dx^2} = -12x \Rightarrow$$

$$A''(1) = -12\cdot 1 = -12 \Rightarrow \text{Máximo} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1^2 = 1 \end{cases}$$

BLOQUE 3

3.A- Estudiar el siguiente sistema de ecuaciones según los valores del parámetro α **y** resolverlos en los casos posibles $\begin{cases} 6x+2y+2z=6 \\ \alpha x+2y+z=\alpha \\ 5x+3y+\alpha z=5 \end{cases}$ **[2'5 puntos]**

$$|A| = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 2 \\ \alpha & 2 & 1 \\ 5 & 3 & \alpha \end{vmatrix} = 12\alpha + 10 + 6\alpha - 20 - 18 - 2\alpha^2 = -2\alpha^2 + 18\alpha - 28 \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow -2\alpha^2 + 18\alpha - 28 = 0$$

$$\alpha^2 - 9\alpha + 14 = 0 \Rightarrow \Delta = (-9)^2 - 4\cdot 1\cdot 14 = 81 - 56 = 25 \geq 0 \Rightarrow \alpha = \frac{9 \pm \sqrt{25}}{2\cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{9+5}{2} = 7 \\ \alpha = \frac{9-5}{2} = 2 \end{cases}$$

$$\forall \alpha \in \Re - \{2, 7\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3 = \text{Número de incognitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Deter min ado}$$

Haremos la solución al final del problema

Si $\alpha = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 2 & 6 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 3 \\ -6 & -6 & -3 & -6 \\ -15 & -9 & -6 & -15 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow 0z = 0 \Rightarrow$$

$$z = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Infinitas soluciones} \Rightarrow \text{Sistema Compatible In det er min ado}$$

$$4y + z = 0 \Rightarrow z = -4y \Rightarrow 3x + y - 4y = 3 \Rightarrow 3x - 3y = 3 \Rightarrow x - y = 1 \Rightarrow x = 1 + y \Rightarrow$$

$$\text{Solución } (x, y, z) = (1+\lambda, \lambda, -4\lambda) \quad (\lambda \in \Re)$$

Si $\alpha = 7$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 2 & 6 \\ 7 & 2 & 1 & 7 \\ 5 & 3 & 7 & 5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 1 & 7 \\ 5 & 3 & 7 & 5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 3 \\ -21 & -6 & -3 & -21 \\ -15 & -9 & -21 & -15 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & -16 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow 0z = 0 \Rightarrow$$

$$z = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Infinitas soluciones} \Rightarrow \text{Sistema Compatible In det er min ado}$$

$$y + 4z = 0 \Rightarrow y = -4z \Rightarrow 3x - 4z + z = 3 \Rightarrow 3x - 3z = 3 \Rightarrow x - z = 1 \Rightarrow x = 1 + z$$

$$\text{Solución } (x, y, z) = (1+\mu, -4\mu, \mu) \quad (\mu \in \Re)$$

Continuación del Problema 3.A del Bloque 3

$$Soluciones\ para\ el\ Sistema\ Compatible\ Determinado$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 2 \\ \alpha & 2 & 1 \\ 5 & 3 & \alpha \end{vmatrix} = 12\alpha + 10 + 6\alpha - 20 - 18 - 2\alpha^2 = -2\alpha^2 + 18\alpha - 28 \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow -2\alpha^2 + 18\alpha - 28 = 0$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 2 & 2 \\ \alpha & 2 & 1 \\ 5 & 3 & \alpha \end{vmatrix}}{-2\alpha^2 + 18\alpha - 28} = \frac{12\alpha + 10 + 6\alpha - 20 - 18 - 2\alpha^2}{-2\alpha^2 + 18\alpha - 28} = \frac{-2\alpha^2 + 18\alpha - 28}{-2\alpha^2 + 18\alpha - 28} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 6 & 2 \\ \alpha & \alpha & 1 \\ 5 & 5 & \alpha \end{vmatrix}}{-2\alpha^2 + 18\alpha - 28} = \frac{0\ (dos\ columnas\ iguales)}{-2\alpha^2 + 18\alpha - 28} = \frac{0}{-2\alpha^2 + 18\alpha - 28} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 2 & 6 \\ \alpha & 2 & \alpha \\ 5 & 3 & 5 \end{vmatrix}}{-2\alpha^2 + 18\alpha - 28} = \frac{0\ (dos\ columnas\ iguales)}{-2\alpha^2 + 18\alpha - 28} = \frac{0}{-2\alpha^2 + 18\alpha - 28} = 0$$

$$\forall \alpha \in \Re - \{2\ ,7\} \Rightarrow Solución\ (x\ ,y\ ,z) = (1\ ,0\ ,0)$$

3.B- Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ k & 2 \end{pmatrix}$, se pide:

i) Razonar para que valores de **k** la matriz $\mathbf{B^t.A^t}$ tiene inversa **[1'5 puntos]**
ii) Resolver la ecuación $\mathbf{(AB)^t = I}$, para **k = 0**, siendo **I** la matriz identidad **[1 punto]**

i) La condición para que una matriz tenga inversa es que su determinante no sea nulo

$$\begin{cases} B^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & k \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ A^t = \begin{pmatrix} -1 & k \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow B^t A^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & k \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & k \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2k-1 & k \\ 3 & k+2 \end{pmatrix} \Rightarrow |B^t A^t| = \begin{vmatrix} 2k-1 & k \\ 3 & k+2 \end{vmatrix}$$

$$|B^t A^t| = (2k-1)\cdot(k+2) - 3k = 2k^2 + 4k - k - 2 - 3k = 2k^2 - 2 = 2(k^2 - 1) \Rightarrow Si\ |B^t A^t| = 0 \Rightarrow$$

$$2(k^2 - 1) = 0 \Rightarrow k^2 - 1 = 0 \Rightarrow k^2 = 1 \Rightarrow k = \pm\sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\forall k \in \Re - \{-1\ ,1\} \Rightarrow |B^t A^t| \neq 0 \Rightarrow (Existe)\ \exists (B^t A^t)^{-1}$$

Continuación del Problema 3.B del Bloque 3

ii)

$$AB=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow (AB)^t=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow (AB)^t X=I\Rightarrow$$

$$\left[(AB)^t\right]^{-1}(AB)^t X=\left[(AB)^t\right]^{-1} I\Rightarrow IX=\left[(AB)^t\right]^{-1} I\Rightarrow X=\left[(AB)^t\right]^{-1}\Rightarrow$$

$$\left|(AB)^t\right|=\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-2\neq 0\Rightarrow \exists\left[(AB)^t\right]^{-1}\Rightarrow\left[(AB)^t\right]^{-1}=\frac{1}{\left|(AB)^t\right|}\left\{adj\left[(AB)^t\right]^t\right\}=\frac{1}{\left|(AB)^t\right|}\,adj\,(AB)\Rightarrow$$

$$adj\,(AB)=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -3 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow\left[(AB)^t\right]^{-1}=\frac{1}{(-2)}\begin{pmatrix}2 & 0\\ -3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

BLOQUE 4

4.A.- Dadas las rectas $r\equiv\begin{cases}x-y+2=0\\ z=-1\end{cases}$ y $s\equiv\begin{cases}x=2\\ y-z-5=0\end{cases}$

i) Determinar su posición relativa **[1'5 puntos]**
ii) En caso de cortarse, determinar el ángulo que forman y el punto de corte **[1 punto]**

i) Analizaremos si los vectores directores de las rectas son iguales o proporcionales y de serlo estudiaremos si tienen un punto común que de tenerlo tendríamos que las rectas son coincidentes, de no ser así son paralelas.
Si no hay proporcionalidad ni igualdad en el análisis veremos si tienen un punto común, si ello se cumple son rectas secantes o que se cruzan, de no darse ete supuesto las rectas se cruzan en el espacio

i)

$$\left\{\begin{array}{l} r\equiv\begin{cases}x=y-2\\ z=-1\end{cases}\Rightarrow r\equiv\begin{cases}x=-2+\lambda\\ y=\lambda\\ z=-1\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{v_r}=(1\,,1\,,0)\\ s\equiv\begin{cases}x=2\\ y=z+5\end{cases}\Rightarrow s\equiv\begin{cases}x=2\\ y=5+\mu\\ z=\mu\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{v_s}=(0\,,1\,,1)\end{array}\right.\Rightarrow\frac{1}{0}\neq\frac{1}{1}\Rightarrow Ni\ paralelas\ ni\ coincidentes$$

Veamos si tienen punto común o de corte

$$\begin{cases}-2+\lambda=2\\ \lambda=5+\mu\\ -1=\mu\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=4\\ \mu=-1\end{cases}\Rightarrow 4=5+(-1)\Rightarrow 4=4\Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

Existe un punto de corte P entre las rectas

Continuación del Problema 4.A del Bloque 4

$ii)$

$Para\ \lambda = 4$

$$P\begin{cases} x = -2 + 4 = 2 \\ y = 4 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow P(2\ ,4\ ,-1)$$

$$\begin{cases} v_r = (1\ ,1\ ,0) \\ v_s = (0\ ,1\ ,1) \end{cases} \Rightarrow cos\ \alpha = \frac{|v_r \cdot v_s|}{|v_r| \cdot |v_s|} = \frac{|(1\ ,1\ ,0)\cdot(0\ ,1\ ,1)|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2} \cdot \sqrt{0^2+1^2+1^2}} = \frac{|1|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\alpha = arc\ cos\left(\frac{1}{2}\right) = 60^0$$

4.B.- Se consideran la recta : $r \equiv \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$, el plano $\pi \equiv 2x - 4y - 2z = 0$ y el punto **P(1 , 1 , 1)**. Se pide:

i) Determinar la ecuación del plano π_1 que pasa por el punto **P** y es paralelo al plano π
[1'25 puntos]

i) Determinar la ecuación general del plano π_2 que contiene a la recta **r** y pasa por el punto **P**
[1'25 puntos]

i) El vector director del plano π_1 es el mismo que el vector director del plano π que es perpendicular al vector formado por el punto **P** y el punto **G**, genérico del plano y por ello su producto escalar es nulo y la ecuación pedida del plano

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_{\pi_1}} = \overrightarrow{v_\pi} = (2\ ,-4\ ,-2) \equiv (1\ ,-2\ ,-1) \\ \overrightarrow{PG} = (x\ ,y\ ,z) - (1\ ,1\ ,1) = (x-1\ ,y-1\ ,z-1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_{\pi_1}} \perp \overrightarrow{PG} \Rightarrow \overrightarrow{v_{\pi_1}} \cdot \overrightarrow{PG} = 0 \Rightarrow$$

$$(1\ ,-2\ ,-1)\cdot(x-1\ ,y-1\ ,z-1) = 0 \Rightarrow x - 1 - 2(y-1) - (z-1) = 0 \Rightarrow \pi \equiv x - 2y - z + 2 = 0$$

ii) Para determinar el plano π_2 contamos con el vector director de la recta **r**, con el vector formado por el punto **P** y un punto **R** cualquiera de la recta **r** (tomaremos el indicado en su ecuación) y por el vector que forma por el punto **P** y el punto **G**, genérico del plano, estos tres vectores son coplanarios (están contenidos en el mismo plano) y por ello el vector **PG** es combinación lineal de los otros dos, por ello el determinante de la matriz que forman los tres es nulo y la ecuación pedida.

$R(2\ ,2\ ,3)$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (1\ ,2\ ,3) \\ \overrightarrow{PR} = (2\ ,2\ ,3) - (1\ ,1\ ,1) = (1\ ,1\ ,2) \\ \overrightarrow{PG} = (x\ ,y\ ,z) - (1\ ,1\ ,1) = (x-1\ ,y-1\ ,z-1) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$4\ (x-1) + 3\ (y-1) + (z-1) - 2\ (z-1) - 3\ (x-1) - 2\ (y-1) = 0 \Rightarrow (x-1) + (y-1) - (z-1) = 0$$

$$\pi \equiv x + y - z - 1 = 0$$