

BLOQUE 1

1.A.- Obtener los puntos de la curva $y = x^3 - 3x^2 + 15$ donde la recta tangente es paralela a la recta que pasa por los puntos $(0, -12)$ y $(1, 12)$ [2'5 puntos]

$$m = \frac{12 - (-12)}{1 - 0} = \frac{24}{1} = 24$$

$$y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow m = 24 \Rightarrow 24 = 3x^2 - 6x \Rightarrow 3x^2 - 6x - 24 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-8) = 4 + 32 = 36 > 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2+6}{2} = 4 \\ x = \frac{2-6}{2} = -2 \end{cases}$$

1.B.- Obtener dominio, intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como máximos y mínimos

de la función $f(x) = \frac{x^2 + 8}{x^2 - 4}$ [2'5 puntos]

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x-2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow f(x) = \frac{2^2 + 8}{2^2 - 4} = \frac{12}{0} \Rightarrow \text{Sin solución} \\ x+2 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow f(x) = \frac{(-2)^2 + 8}{(-2)^2 - 4} = \frac{12}{0} \Rightarrow \text{Sin solución} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{Dom}(f) = \forall x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 4) - 2x(x^2 + 8)}{(x^2 - 4)^2} = \frac{2x^3 - 8x - 2x^3 - 16x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-24x}{(x^2 - 4)^2} \Rightarrow \text{Crecimiento} \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -24 < 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ x > 0 \\ (x^2 - 4)^2 > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$-24 < 0$	(-)	(-)
$x > 0$	(+)	(-)
$(x^2 - 4)^2 > 0$	(+)	(+)
Solución	(-)	(+)

Crecimiento $\forall x \in \mathbb{R} / x > 0$

Decrecimiento $\forall x \in \mathbb{R} / x < 0$

Mínimo relativo en $x = 0$ $f(0) = \frac{0^2 + 8}{0^2 - 4} = \frac{8}{-4} = -2$ De decrecimiento pasa a crecimiento

BLOQUE 2

2.A.- Calcular el área del recinto limitado por la curva $y = 4 - x^2$, la recta $8x + 2y = 16$ y la recta $y = 4x + 8$ [2'5 puntos]

$$\text{Puntos de corte con el eje OX} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \\ 8x + 2 \cdot 0 = 16 \Rightarrow x = \frac{16}{2} = 8 \\ 4x + 8 = 0 \Rightarrow 4x = -8 \Rightarrow x = -\frac{8}{4} = -2 \end{cases}$$

$$\text{Puntos de corte entre funciones} \Rightarrow \begin{cases} 4 - x^2 = 8 - 4x \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{2} \Rightarrow x = 2 \\ 4 - x^2 = 8 + 4x \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4}{2} \Rightarrow x = -2 \\ 4x + 8 = 8 - 4x \Rightarrow 8x = 0 \Rightarrow x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} y(-1) = 4 - (-1)^2 = 3 \Rightarrow \text{Positivo} \\ y(-1) = 8 + 4(-1) = 4 \Rightarrow \text{Positivo} \end{cases} \Rightarrow 4x + 8 > 4 - x^2 \\ \begin{cases} y(1) = 4 - 1^2 = 3 \Rightarrow \text{Positivo} \\ y(1) = 8 - 4 \cdot 1 = 4 \Rightarrow \text{Positivo} \end{cases} \Rightarrow 8 - 4x > 4 - x^2 \end{cases}$$

$$A = \int_{-2}^0 (4x + 8) dx - \int_{-2}^0 (4 - x^2) dx + \int_0^2 (8 - 4x) dx - \int_0^2 (4 - x^2) dx = \int_{-2}^0 (4x + 8) dx + \int_0^2 (8 - 4x) dx - \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx$$

$$A = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot [x^2]_{-2}^0 + 8 \cdot [x]_{-2}^0 + 8 \cdot [x]_0^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot [x^2]_0^2 - 4 \cdot [x]_{-2}^2 + \frac{1}{3} \cdot [x^3]_{-2}^2$$

$$A = 2 \cdot [0^2 - (-2)^2] + 8 \cdot [0 - (-2)] + 8 \cdot (2 - 0) - 2 \cdot (2^2 - 0^2) - 4 \cdot [2 - (-2)] + \frac{1}{3} \cdot [2^3 - (-2)^3]$$

$$A = 2 \cdot (-4) + 8 \cdot 2 + 8 \cdot 2 - 2 \cdot 4 - 4(2 + 2) + \frac{1}{3} \cdot (8 + 8) = -8 + 16 + 16 - 8 - 16 + \frac{16}{3} = \frac{16}{3} u^2$$

2.B.- Calcular las siguientes integrales

i) $\int \frac{dx}{x^2-1}$ (1'25 puntos) y ii) $\int x^2 \cdot e^{3x} dx$ (1'25 puntos)

i) Método de integración de funciones racionales

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)} \Rightarrow A(x+1)+B(x-1)=1 \Rightarrow$$

$$\text{Si } \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \Rightarrow A(-1+1)+B(-1-1)=1 \Rightarrow -2B=1 \Rightarrow B=-\frac{1}{2} \\ x=1 \Rightarrow A(1+1)+B(1-1)=1 \Rightarrow 2A=1 \Rightarrow A=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{x+1}$$

$$I = \int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} - \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln t - \frac{1}{2} \ln u = \frac{1}{2} (\ln t - \ln u) = \frac{1}{2} \ln \frac{t}{u}$$

$$\text{Cambios de variable } \Rightarrow \begin{cases} x-1=t \Rightarrow dx=dt \\ x-1=u \Rightarrow dx=du \end{cases}$$

$$I = \int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2} \ln \frac{x-1}{x+1} = \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^{\frac{1}{2}} = \ln \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + K$$

ii) Método de Integración por partes

$$I = \int x^2 \cdot e^{3x} dx = x^2 \cdot \frac{e^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3} 2x dx = \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2}{3} \int x \cdot e^{3x} dx = \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2}{3} \left(x \cdot \frac{e^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3} dx \right)$$

$$\begin{cases} x^2 = u \Rightarrow 2x dx = du \\ e^{3x} dx = dv \Rightarrow v = \int e^{3x} dx = \int e^t \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \int e^t dt = \frac{e^t}{3} = \frac{e^{3x}}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} x = u \Rightarrow dx = du \\ e^{3x} dx = dv \Rightarrow v = \int e^{3x} dx = \frac{e^{3x}}{3} \end{cases}$$

$$3x = t \Rightarrow 3 dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{3}$$

$$I = \int x^2 \cdot e^{3x} dx = \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2}{9} x \cdot e^{3x} + \frac{2}{9} \int e^{3x} dx = \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2}{9} x \cdot e^{3x} + \frac{2}{9} \frac{e^{3x}}{3} = \left(x^2 - \frac{2}{3} x + \frac{2}{9} \right) \cdot \frac{e^{3x}}{3} + K$$

BLOQUE 3

3.A- Dada las matrices $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

i) Hallar las matrices **A** y **B** que verifican el sistema: $\begin{cases} 2A + B = M \\ A - 3B = N \end{cases}$ [1'25 puntos]

ii) Calcular $M^{-1}N^t$ [1'25 puntos]

i)

$$\begin{cases} 6A + 3B = 3M \\ A - 3B = N \end{cases} \Rightarrow 7A = 3M + N \Rightarrow A = \frac{1}{7}(3M + N) \Rightarrow A = \frac{1}{7} \left[3 \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$A = \frac{1}{7} \left[\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{7} & -\frac{1}{7} \\ \frac{6}{7} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2A + B = M \\ -2A + 6B = (-2)N \end{cases} \Rightarrow 7B = M - 2N \Rightarrow B = \frac{1}{7}(M - 2N) \Rightarrow B = \frac{1}{7} \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$B = \frac{1}{7} \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & \frac{2}{7} \\ -\frac{5}{7} & 0 \end{pmatrix}$$

ii) La condición necesaria para que exista una matriz inversa es que su determinante no sea nulo

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow \exists M^{-1} \Rightarrow M^{-1} = \frac{1}{|M|} (\text{adj } M^t) \Rightarrow M^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj } M^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} M^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \\ N^t = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow M^{-1}N^t = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ -\frac{2}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

3.B.- Discutir el siguiente sistema según los valores del parámetro k

$$\begin{cases} x + ky + z = 4 \\ x + 3y + z = 5 \\ kx + y + z = 4 \end{cases}$$

[2'5 puntos]

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & k & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ k & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + k^2 + 1 - 3k - 1 - k = k^2 - 4k + 3 \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow k^2 - 4k + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4 \Rightarrow k = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 1} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{4+2}{2} = 3 \\ k = \frac{4-2}{2} = 1 \end{cases}$$

$\forall x \in \mathbb{R} - \{1, 3\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$

Si $a = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow 0z = 0 \Rightarrow z = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Infinitas soluciones}$$

Sistema Compatible Indeterminado

Si $a = 3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -8 & -2 & -8 \end{array} \right) \Rightarrow 0z = 1 \Rightarrow z = \frac{1}{0} \Rightarrow \text{Sin solución}$$

Sistema Incompatible

BLOQUE 4

4.A.- Calcular la ecuación del plano que contiene a la recta $r : \begin{cases} y = 1 + x \\ z = 2 \end{cases}$ y es paralelo a la

$$\text{recta } s : \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = -2 \\ z = \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathfrak{R}) \quad \text{[2'5 puntos]}$$

Para hallar la ecuación del plano π utilizaremos el vector director de la recta r , el vector director de la recta s y el vector que forman uno cualquiera de los puntos R de la recta r , que es la contenida (tomaremos el punto indicado en la ecuación) con el vector G , generador del plano pedido. Estos tres vectores son coplanarios, siendo el vector RG combinación lineal de los otros dos y, por ello, el determinante de la matriz formada por ellos es nulo y la ecuación del plano que se busca.

$$r : \begin{cases} x = \mu \\ y = 1 + \mu \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (1, 1, 0) \\ R(0, 1, 2) \end{cases}$$

\Rightarrow

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (1, 1, 0) \\ \vec{v}_s = (-2, 0, 1) \\ \overrightarrow{RG} = (x, y, z) - (0, 1, 2) = (x, y-1, z-2) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x + 2(z-2) - (y-1) \Rightarrow \pi \equiv x - y + 2z - 3 = 0$$

4.B.- Dado el plano: $\pi : 3x - 2y + z = 5$ y la recta $r : \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-2} = z+3$, hallar su posición relativa. Si se cortan en un punto, hallar sus coordenadas. Y si son paralelos, hallar el plano que contenga a r y sea paralelo a π **[2'5 puntos]**

$$r : \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = -3 + \lambda \end{cases} \Rightarrow 3 \cdot 2\lambda - 2(1 - 2\lambda) + (-3 + \lambda) = 5 \Rightarrow 6\lambda - 2 + 4\lambda - 3 + \lambda = 5 \Rightarrow 11\lambda = 10 \Rightarrow \lambda = \frac{10}{11} \Rightarrow$$

$$\text{Siendo } P \text{ el punto de corte} \Rightarrow P \begin{cases} x = 2 \cdot \frac{10}{11} = \frac{20}{11} \\ y = 1 - 2 \cdot \frac{10}{11} = 1 - \frac{20}{11} = -\frac{9}{11} \\ z = -3 + \frac{10}{11} = -\frac{23}{11} \end{cases} \Rightarrow P \left(\frac{20}{11}, -\frac{9}{11}, -\frac{23}{11} \right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 8 + 3 + 3 + 2 + 2 - 18 = 0 \Rightarrow \text{No hay punto de corte}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 7 \\ 1 & 1 & -2 & 5 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ -6 & 4 & 2 & -14 \\ -2 & -2 & 4 & -10 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -8 \\ 0 & -5 & 5 & -8 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 5 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow$$

Sistema Compatible Indeterminado \Rightarrow Se corta según una recta $r \Rightarrow$

$$r : \begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ 5y - 5z = 8 \end{cases} \Rightarrow 5y = 8 + 5z \Rightarrow y = \frac{8}{5} + z \Rightarrow 2x - 3\left(\frac{8}{5} + z\right) + z = 2 \Rightarrow 2x - \frac{24}{5} - 3z + z = 2 \Rightarrow$$

$$2x = 2 + \frac{24}{5} + 2z \Rightarrow 2x = \frac{34}{5} + 2z \Rightarrow x = \frac{17}{5} + z \Rightarrow r : \begin{cases} x = \frac{17}{5} + \lambda \\ y = \frac{8}{5} + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

www.yoquieroaprobar.es