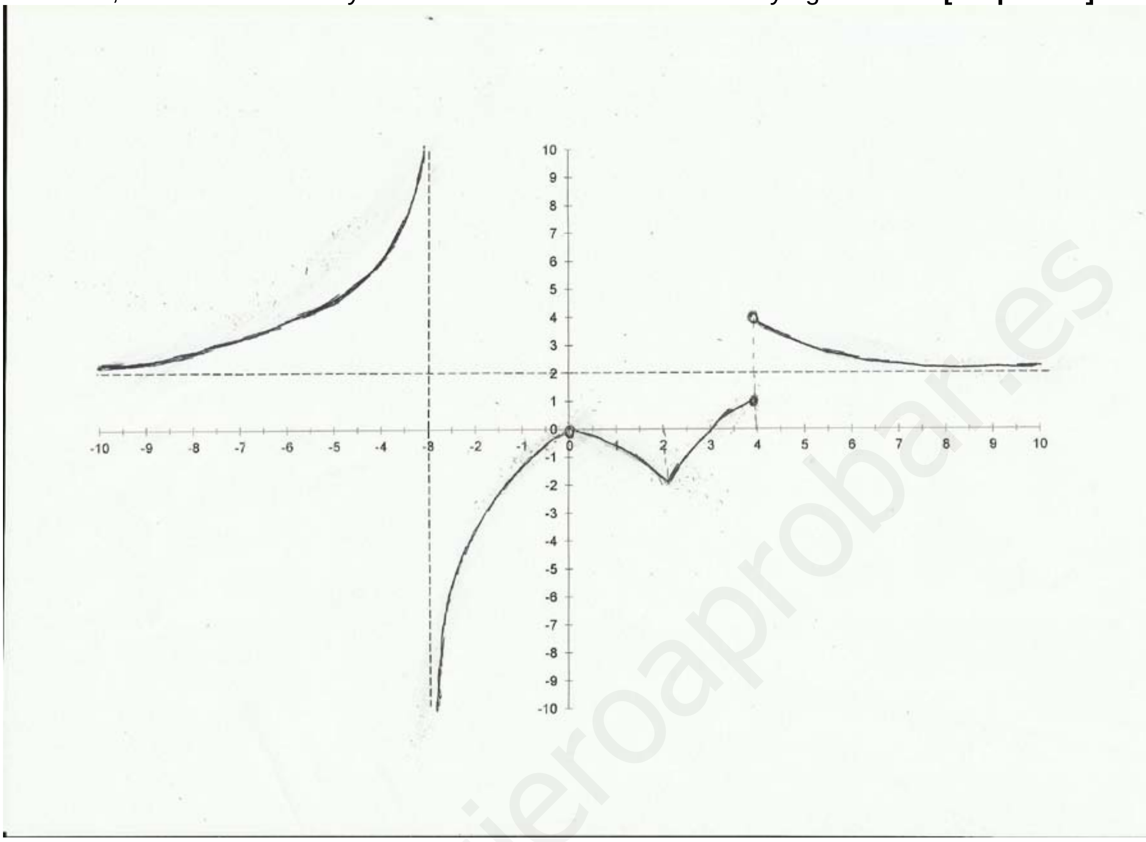
Opción A

1..-Determinar dominio, puntos de corte con los ejes coordenados, puntos de discontinuidad, asíntotas, máximos relativos y mínimos relativos de la función cuya gráfica es: **[2.5 puntos]**



$Dom(f) = \forall x \in \Re - \{-3\ ,0\}$

$Puntos\ de\ corte\ con\ OX \Rightarrow x = 3$

$$Puntos\ de\ discontinuidad \begin{cases} Evitable \Rightarrow x = 4 \\ No\ evitable \Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

$Asíntota\ vertical \Rightarrow x = -3$

$Asíntota\ horizontal \Rightarrow y = 2$

$$Máximo\ relativo\ en \begin{cases} x = 0^- \\ x = 0^+ \end{cases}$$

$Mínimo\ relativo\ en\ x = 2 \Rightarrow No\ derivable$

2.- Se quiere construir una ventana rectangular de 1 metro cuadrado de área. El coste del marco es **12'5 €** por cada metro de altura y de **8 €** por cada metro de anchura. ¿Qué dimensiones debe de tener la ventana para que el marco resulte lo más económico posible? **[2.5 puntos]**

Siendo **H** la altura y **A** la anchura

$$\begin{cases} 1 = HA \Rightarrow A = \dfrac{1}{H} \\ P = 12'5 \cdot 2 \cdot H + 8 \cdot 2 \cdot A = 25 \cdot H + 16 \cdot A \end{cases} \Rightarrow P = 25 \cdot H + 16 \cdot \frac{1}{H} = \frac{25 \cdot H^2 + 16}{H} \Rightarrow$$

$$P' = \frac{dP}{dH} = \frac{50H^2 - \left(25 \cdot H^2 - 16\right)}{H^2} = \frac{25 \cdot H^2 - 16}{H^2} \Rightarrow P' = 0 \Rightarrow = \frac{25 \cdot H^2 - 16}{H^2} = 0 \Rightarrow 25 \cdot H^2 - 16 = 0 \Rightarrow$$

$$25 \cdot H^2 = 16 \Rightarrow H^2 = \frac{16}{25} \Rightarrow H = \pm\sqrt{\frac{16}{25}} \Rightarrow \begin{cases} H = \dfrac{4}{5} \\ H = -\dfrac{4}{5} \Rightarrow No\ es\ solución \end{cases} \Rightarrow$$

$$P'' = \frac{50H \cdot H^2 - 2H \cdot \left(25 \cdot H^2 - 16\right)}{H^4} = \frac{50H^3 - 50H^3 + 32H}{H^4} = \frac{32}{H^3} \Rightarrow$$

$$P''\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{32}{\left(\dfrac{4}{5}\right)^3} = \frac{32 \cdot 125}{64} = \frac{125}{2} > 0 \Rightarrow Mínimo\ coste \Rightarrow \begin{cases} H = \dfrac{4}{5}\ m \\ A = \dfrac{1}{\frac{4}{5}} = \dfrac{5}{4}\ m \end{cases}$$

3.- Dado el sistema: $\begin{cases} 2x + y - z = -1 \\ x - 2y + 2z = m \\ 3x - y + mz = 4 \end{cases}$

a) Discutirlo según los valores de **m [1.5 puntos]**
b) Resolverlo para **m = 0 [1 punto]**

$a)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & m \end{vmatrix} = -4m + 6 + 1 - 6 + 4 - m = -5m + 5 \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow -5m + 5 = 0 \Rightarrow m = 1$$

$$\forall x \in \Re - \{1\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3 = Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Determinado$$

$Si\ m = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 4 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -4 & -2 \\ -6 & 2 & -2 & -8 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & -3 \\ 0 & 5 & -5 & -11 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$Sistema\ Incompatible$

Continuación del Problema 3 de la opción A

b)

$Si\ m = 0 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -4 & 0 \\ -6 & 2 & 0 & -8 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & -1 \\ 0 & 5 & -3 & -11 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -10 \end{array}\right) \Rightarrow 2z = -10 \Rightarrow z = -5$$

$$5y - 5 \cdot (-5) = -3 \Rightarrow 5y = -1 - 25 \Rightarrow y = -\frac{26}{5} \Rightarrow 2x - \frac{26}{5} + 5 = -1 \Rightarrow 2x = \frac{26}{5} - 5 - 1 \Rightarrow 2x = -\frac{4}{5} \Rightarrow$$

$$x = -\frac{2}{5} \Rightarrow Solución \left(-\frac{2}{5}, -\frac{26}{5}, -5 \right)$$

4.- Dadas las siguientes rectas

$$r:(x,y,z)=(-8,-4,5)+\lambda(-2,1,-2) \text{ y } s:\begin{cases}4y-3x=8\\4z-5x=60\end{cases}$$

a) Comprobar que se cortan en un punto y hallar sus coordenadas **[1.5 puntos]**
b) Hallar la ecuación de la recta paralela a **s** y que pasa por el punto **(1 , 0 , - 1) [1punto]**

a)

$$\begin{cases} r\equiv\begin{cases}x=-8-2\lambda\\y=-4+\lambda\\z=5-2\lambda\end{cases} \\ \begin{cases}4y=8+3x\Rightarrow y=\dfrac{8+3x}{4}=2+\dfrac{3}{4}x\\4z=60+5x\Rightarrow z=\dfrac{60+5x}{4}=15+\dfrac{5}{4}x\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{v_s}=\left(1,\dfrac{3}{4},\dfrac{5}{4}\right)\equiv(4,3,5)\Rightarrow s\equiv\begin{cases}x=4\alpha\\y=2+3\alpha\\z=15+5\alpha\end{cases}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\overrightarrow{v_r}=(-2,1,-2)\\\overrightarrow{v_s}=(4,3,5)\end{cases}\Rightarrow\frac{-2}{4}\neq\frac{1}{3}\Rightarrow No\ son\ paralelas\ ni\ coincidentes$$

Veamos si se cortan

$$\begin{cases}-8-2\lambda=4\alpha\\-4+\lambda=2+3\alpha\\5-2\lambda=15+5\alpha\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda+2\alpha=-4\\\lambda-3\alpha=6\\2\lambda+5\alpha=-10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\lambda+2\alpha=-4\\-\lambda+3\alpha=-6\end{cases}\Rightarrow 5\alpha=-10\Rightarrow\alpha=-2\Rightarrow\lambda-4=-4\Rightarrow\lambda=0\Rightarrow$$

$$2\cdot0+5\cdot(-2)=-10\Rightarrow-10=-10\Rightarrow Sistema\ Compatible\ Determinado\Rightarrow$$

$$Punto\ de\ corte\ de\ r\ y\ s\Rightarrow P\begin{cases}x=-8-2\cdot0\\y=-4+0\\z=5-2\cdot0\end{cases}\Rightarrow P(-8,-4,5)$$

b)

Llamando t a la recta buscada

$$\overrightarrow{v_t}=\overrightarrow{v_s}=(4,3,5)\Rightarrow t\equiv\begin{cases}x=1+4\beta\\y=3\beta\\z=-1+5\beta\end{cases}$$

Opción B

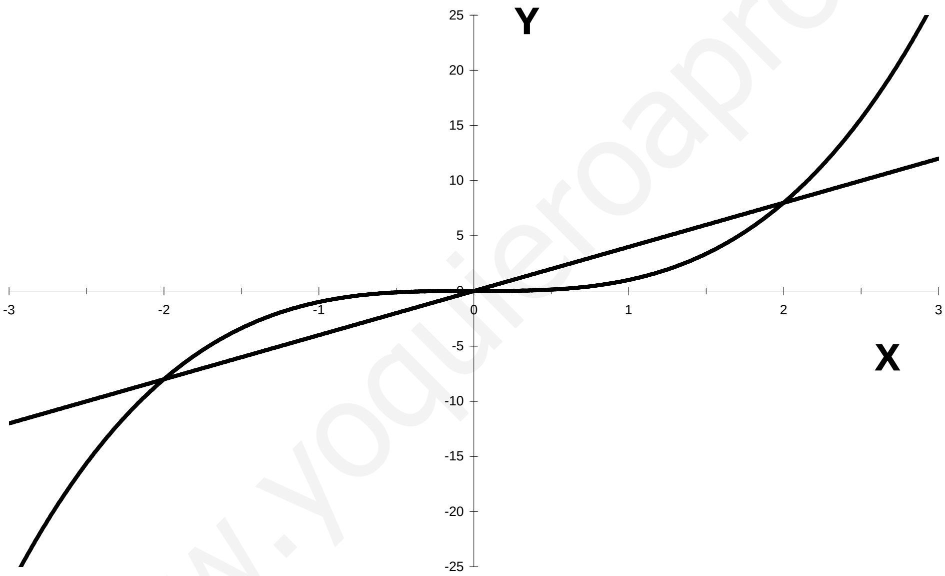
1..-Determinar una función **f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d**, sabiendo que su gráfica pasa por el punto **P(-1 , 2)** y tiene un punto de inflexión con tangente horizontal en **Q(0 , -2) [2’5 puntos]**

$$\begin{cases} f'(x)=3ax^2+2bx+c \\ f''(x)=6ax+2b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(-1)=2 \Rightarrow a\cdot(-1)^3+b\cdot(-1)^2+c\cdot(-1)+d=2 \Rightarrow -a+b-c+d=2 \\ f(0)=-2 \Rightarrow a\cdot 0^3+b\cdot 0^2+c\cdot 0+d=2 \Rightarrow d=-2 \\ f'(0)=0 \Rightarrow 3a\cdot 0^2+2b\cdot 0+c=0 \\ f''(0)=0 \Rightarrow 6a\cdot 0+2b=0 \Rightarrow 2b=0 \Rightarrow b=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$-a+0+0-2=2 \Rightarrow -a=4 \Rightarrow a=-4 \Rightarrow f(x)=-4x^3-2$$

2.- Dada las funciones **f(x) = x^3** y **g(x) = 4x**
a) Representa los recintos delimitados por sus gráficas **[1’25 puntos]**
b) Calcula el área de los recintos delimitados **[1’25 puntos]**

a)



b)

$$\text{Puntos de corte entre funciones} \Rightarrow x^3=4x \Rightarrow x^3-4x=0 \Rightarrow (x^2-4)x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2-4=0 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow$$

$$A=\left|\int_{-2}^{0} 4x\,dx\right|-\left|\int_{-2}^{0} x^3\,dx\right|+\int_{0}^{2} 4x\,dx-\int_{0}^{2} x^3\,dx=-4\int_{-2}^{0} x\,dx+\int_{-2}^{0} x^3\,dx+4\int_{0}^{2} x\,dx-\int_{0}^{2} x^3\,dx$$

$$A=-4\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_{-2}^{0}+\frac{1}{4}\cdot\left[x^4\right]_{-2}^{0}+4\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_{0}^{2}-\frac{1}{4}\cdot\left[x^4\right]_{0}^{2}=$$

$$A=-2\cdot\left[0^2-(-2)^2\right]+\frac{1}{4}\cdot\left[0^4-(-2)^4\right]+2\cdot\left(2^2-0^2\right)-\frac{1}{4}\cdot\left(2^4-0^4\right)=(-2)\cdot(-4)+\frac{1}{4}\cdot(-16)+2\cdot 4-\frac{1}{4}\cdot 16$$

$$A=8-4+8-4=8\ u^2$$

3.- Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$

a) Hallar la matriz **N = 2 . A . A^t – 5 . I**, siendo $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **[1.25 puntos]**

b) Resolverlo la siguiente ecuación matricial $A \,.\, X = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ **[1.25 puntos]**

a)

$$\begin{cases} A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \\ A^t = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow N = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & -13 \\ -13 & 34 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$N = \begin{pmatrix} 10 & -26 \\ -26 & 68 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -26 \\ -26 & 63 \end{pmatrix}$$

b)

$$A^{-1} A \,.\, X = A^{-1} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow I \,.\, X = A^{-1} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow X = A^{-1} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} - 5 + 6 = 1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \left(adj\ A^t \right) \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$adj\ A^t = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -23 & -5 \\ 13 & 2 \end{pmatrix}$$

4.- Dada los planos: $\pi_1 : x + y - 3z = 1 \quad y \quad \pi_2 : 2x - 3y + z = 2$

a) Hallar la ecuación del plano perpendicular a ambos planos que pasa por el origen de coordenadas **[1.5 puntos]**

b) Hallar el ángulo que forman $\pi_1 \ y \ \pi_2$ **[1 punto]**

a) El vector director del plano buscado π es perpendicular a los dos vectores directores de los planos dados, lo podremos hallar calculando el producto vectorial de estos. Una vez obtenido ese vector este es perpendicular al vector formado por el origen de coordenadas **O**, que contiene, y el vector genérico **G** del plano, siendo su producto escalar nulo y la ecuación buscada

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_{\pi_1}} = (1, 1, -3) \\ \overrightarrow{v_{\pi_2}} = (2, -3, 1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} = \overrightarrow{v_{\pi_1}} \times \overrightarrow{v_{\pi_2}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - 6\vec{j} - 3\vec{k} - 2\vec{k} - 9\vec{i} - \vec{j} = -8\vec{i} - 7\vec{j} - 5\vec{k} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi} = (-8, -7, -5) \equiv (8, 7, 5) \\ \overrightarrow{OG} = (x, y, z) - (0, 0, 0) = (x, y, z) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \perp \overrightarrow{OG} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \cdot \overrightarrow{OG} = 0 \Rightarrow (8, 7, 5) \cdot (x, y, z) = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv 8x + 7y + 5z = 0$$

b) El coseno del ángulo α que forman los planos es el mismo que forman sus vectores directores

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_{\pi_1}} = (1, 1, -3) \\ \overrightarrow{v_{\pi_2}} = (2, -3, 1) \end{cases} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\left| \overrightarrow{v_{\pi_1}} \cdot \overrightarrow{v_{\pi_2}} \right|}{\left| \overrightarrow{v_{\pi_1}} \right| \cdot \left| \overrightarrow{v_{\pi_2}} \right|} = \frac{\left| (1, 1, -3) \cdot (2, -3, 1) \right|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2}} = \frac{|2 - 3 - 3|}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{14}} = \frac{|-8|}{\sqrt{154}}$$

$$\cos \alpha = \frac{8 \cdot \sqrt{154}}{154} = \frac{4 \cdot \sqrt{154}}{77} \Rightarrow \alpha = arc \cos \left(\frac{4 \cdot \sqrt{154}}{77} \right) = 49^o 51' 36''$$