Opción A

1..-Representar la gráfica de una función **f(x)** que cumpla las siguientes propiedades:

a) Tiene dos asíntotas verticales, **x = - 1** y **x = 3**

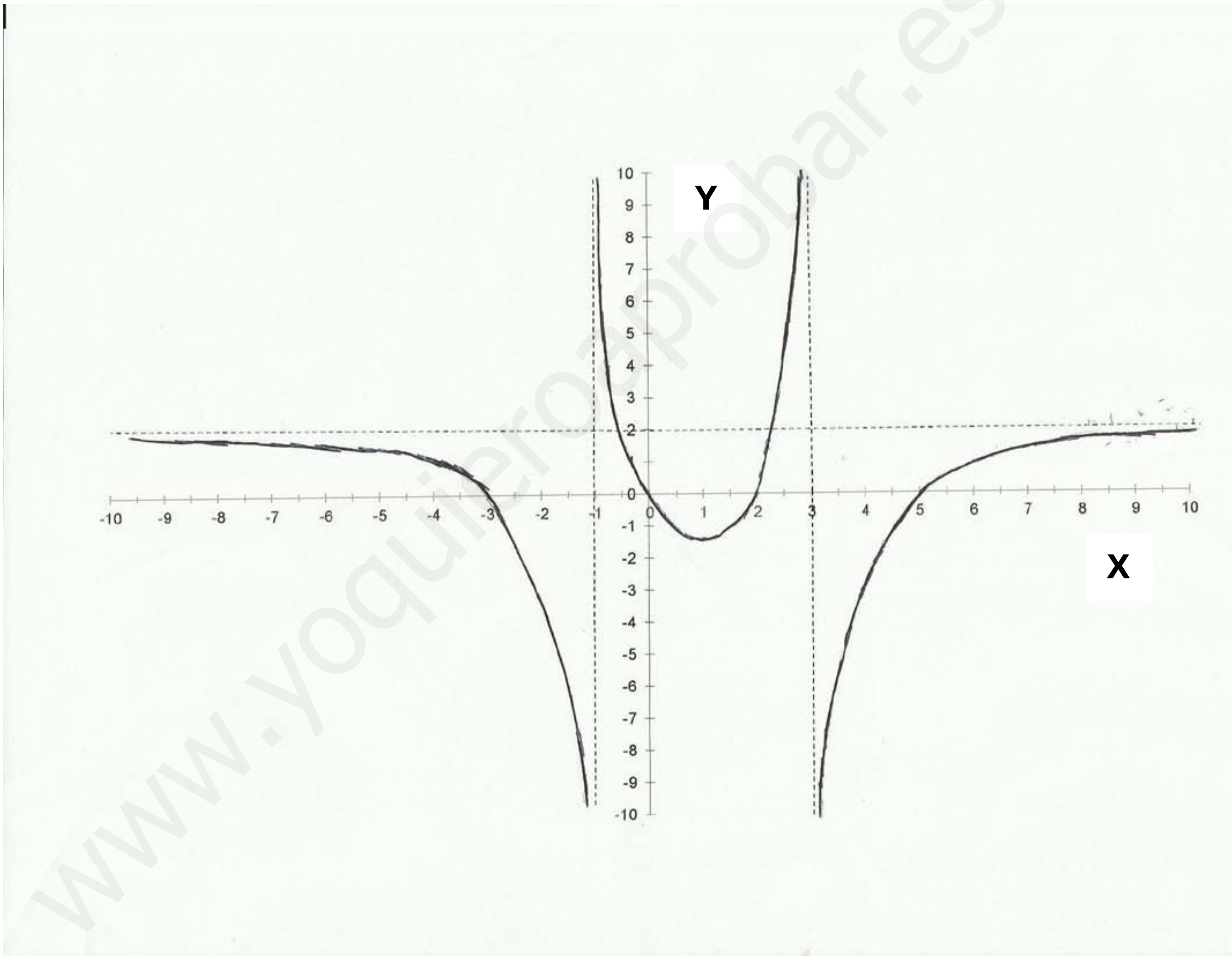
b) Para $x = \pm\infty$**, se cumple f(x) = 2**

c) **f(-3) = f(0) = f(2) = f(5) = 0**

d) Es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, 1)$ y es creciente **en** $(1, 3) \cup (3, +\infty)$

e) **f(1) = -1**

[2’5 puntos]



2.- Dadas las funciones **f(x) = x² – 4** y **g(x) = 3x**,
a) Representar el recinto limitado por sus gráficas indicando vértice y puntos de corte con los ejes **[1.25 puntos]**
b) Calcular el área de dicho recinto **[1.25 puntos]**

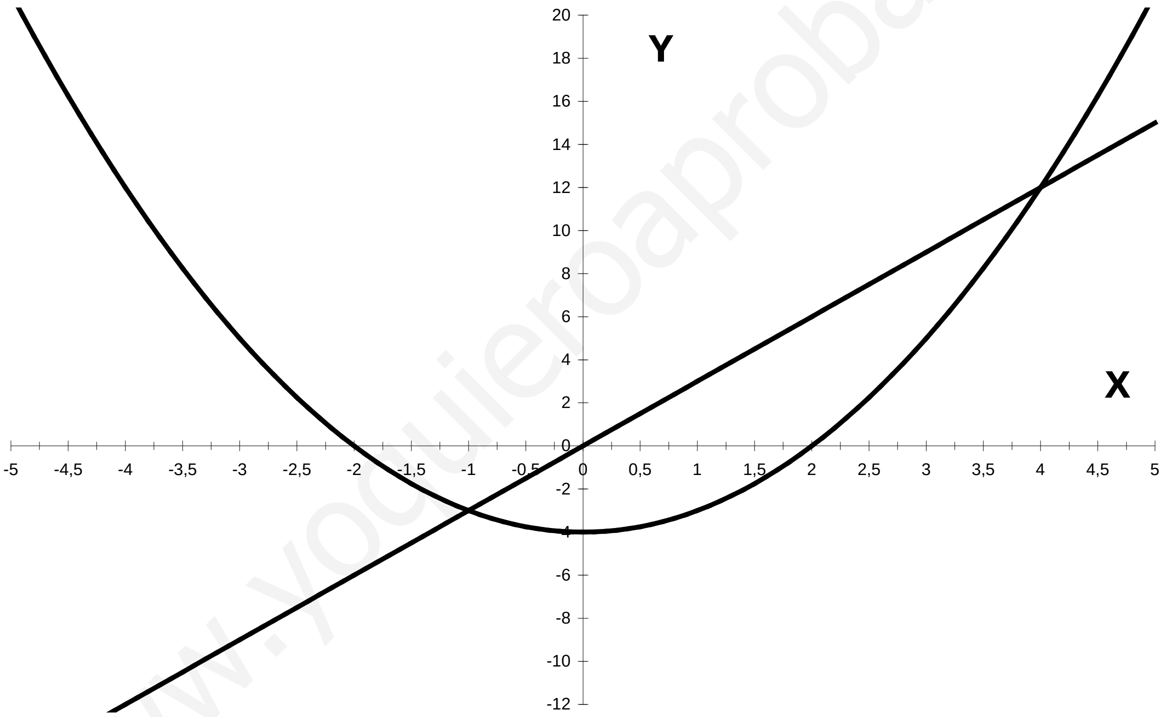
a)

$$Puntos\ de\ corte\ con\ OX \Rightarrow y=0 \Rightarrow \begin{cases} x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm\sqrt{4} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \Rightarrow (-2\ ,0) \\ x=2 \Rightarrow (2\ ,0) \end{cases} \\ 3x=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow (0\ ,0) \end{cases}$$

$$Vértice\ de\ la\ parábola \Rightarrow f'(x)=2x \Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow f(0)=0^2-4 \Rightarrow (0\ ,-4)$$

$$Puntos\ de\ corte\ entre\ funciones \Rightarrow f(x)=g(x) \Rightarrow 3x=x^2-4 \Rightarrow x^2-3x-4=0 \Rightarrow$$

$$\Delta=(-3)^2-4\cdot 1\cdot(-4)=25>0 \Rightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{25}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3+5}{2}=4 \\ x=\frac{3-5}{2}=-1 \end{cases}$$



$$A=\left|\int_{-1}^{0}(x^2-4)\,dx\right|-\left|\int_{-1}^{0}3x\ dx\right|+\int_{0}^{2}3x\ dx+\left|\int_{0}^{2}(x^2-4)\,dx\right|+\int_{2}^{4}3x\ dx-\int_{2}^{4}(x^2-4)\,dx$$

$$A=-\int_{-1}^{0}(x^2-4)\,dx-\int_{0}^{2}(x^2-4)\,dx-\int_{2}^{4}(x^2-4)\,dx+\int_{-1}^{0}3x\ dx+\int_{0}^{2}3x\ dx+\int_{2}^{4}3x\ dx$$

$$A=3\int_{-1}^{4}x\ dx-\int_{-1}^{4}(x^2-4)\,dx=\int_{-1}^{4}(3x-x^2+4)\,dx=3\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_{-1}^{4}-\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_{-1}^{4}+4\cdot[x]_{-1}^{4}$$

$$A=\frac{3}{2}\cdot\left[4^2-(-1)^2\right]-\frac{1}{3}\cdot\left[4^3-(-1)^3\right]+4\cdot[4-(-1)]=\frac{3}{2}\cdot 15-\frac{1}{3}\cdot 65+4\cdot 5=\frac{135-130+120}{6}=\frac{125}{6}\ u^2$$

3.- a) Discutir el siguiente tiene sistema según los valores del parámetro **m**

$$\begin{cases} mx - y + 3z = m \\ 2x + 4z = 1 \\ x - y + 2z = -2 \end{cases}$$ **[1.5 puntos]**

b) Resolverlo para **m = 0 [1 punto]**

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} m & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 6 + 4m + 4 = 4m - 6 \Rightarrow Si\ A = 0 \Rightarrow 4m - 6 = 0 \Rightarrow 4m = 6 \Rightarrow m = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$\forall x \in \Re - \left\{\frac{3}{2}\right\} \Rightarrow A \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3 = Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$$Si\ m = 2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{3}{2} & -1 & 3 & \frac{3}{2} \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 6 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & -2 & 4 & -4 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 6 & 3 \\ -6 & 0 & -12 & -3 \\ -6 & 6 & -12 & 12 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 6 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 18 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 6 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 36 \end{array}\right) \equiv$$

$$\equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 6 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 39 \end{array}\right) \Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$$

b)

$$|A| = 4 \cdot 0 - 6 = -6 \Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{8 - 3 + 2}{-6} = -\frac{7}{6} \Rightarrow y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-12 - 3}{-6} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-1 - 4}{-6} = \frac{5}{6} \Rightarrow Solución\left(-\frac{7}{6}, \frac{5}{2}, \frac{5}{6}\right)$$

4.- Obtener la ecuación en forma general del plano que pasa por el punto **(0 , 3 , 2) y** es paralelo a las dos rectas siguientes:

$$r_1 : \frac{x}{-1} = \frac{y+3}{2} = z+1 \qquad r_2 : \begin{cases} x - z = 5 \\ 2x + 3y - z = 0 \end{cases}$$ **[2.5 puntos]**

Una forma

$$x + 3y = -5 \Rightarrow x = -3y - 5 \Rightarrow -3y - 5 - z = 5 \Rightarrow z = -3y - 10 \Rightarrow r_2 \equiv \begin{cases} x = -5 - 3\lambda \\ y = \lambda \\ z = -10 - 3\lambda \end{cases} \Rightarrow$$

Los vectores directores son paralelos al plano

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_{r_1}} = (-1 , 2 , 1) \\ \overrightarrow{v_{r_2}} = (-3 , 1 , -3) \equiv (3 , -1 , 3) \\ \overrightarrow{AG} = (x , y , z) - (0 , 3 , 2) = (x , y - 3 , z - 2) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y-3 & z-2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$6x + 3 \cdot (y-3) + (z-2) - 6 \cdot (z-2) + x + 3 \cdot (y-3) = 0 \Rightarrow 7x + 6 \cdot (y-3) - 5 \cdot (z-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv 7x + 6y - 5z - 8 = 0$$

Segunda forma

Hallar el vector director del plano que es perpendicular a $\overrightarrow{v_{r_1}}$ *y a* $\overrightarrow{v_{r_2}}$

$$\overrightarrow{v_\pi} = \overrightarrow{v_{r_1}} \times \overrightarrow{v_{r_2}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k} - 6\vec{k} + \vec{i} + 3\vec{j} = 7\vec{i} + 6\vec{j} - 5\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} = (7 , 6 , -5) \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{v_\pi} \perp \overrightarrow{AG} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \cdot \overrightarrow{AG} = 0 \Rightarrow (7 , 6 , -5) \cdot (x , y - 3 , z - 2) = 0 \Rightarrow 7x + 6 \cdot (y-3) - 5 \cdot (z-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv 7x + 6y - 5z - 8 = 0 \ (\text{comprobada la igualdad})$$

Opción B

1..-Dada la función: $f(x)=\begin{cases} e^{bx}+a^2x\ , & si\ x<0 \\ b+\cos ax\ , & si\ x\geq 0\end{cases}$ determinar los valores de **a** y de **b para** que resulte derivable en toda la recta real **[2.5 puntos]**

Para que sea derivable debe de ser continua en todo el recorrido de la función y el valor de la derivada en el posible punto de discontinuidad el mismo.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=e^{b\cdot 0}+a^2\cdot 0=e^0+0=1 \\ f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=b+\cos(a\cdot 0)=b+\cos 0=b+1 \end{cases} \Rightarrow f(0)=\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)\Rightarrow b+1=1\Rightarrow b=0$$

$$f(x)=\begin{cases} e^0+a^2x\ , & si\ x<0 \\ \cos ax\ , & si\ x\geq 0\end{cases}\Rightarrow$$

$$f'(x)=\begin{cases} a^2\ , & si\ x<0 \\ -a\cdot sen\ ax\ , & si\ x\geq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=a^2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=-a\cdot sen(a\cdot 0)=-a\cdot sen\ 0=0\end{cases}\Rightarrow 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^-} f'(x)\Rightarrow a^2=0\Rightarrow a=0\Rightarrow f(x)=\begin{cases} 1\ , & si\ x<0 \\ 1\ , & si\ x\geq 0\end{cases}$$

2.- Determinar dos números positivos cuya suma sea **24** y tales que el producto de uno por el cubo del otro sea máximo **[2.5 puntos]**

Sean los números **a** y **b**

$$\begin{cases} a+b=24\Rightarrow a=24-b \\ P=a\cdot b^3\end{cases}\Rightarrow P=(24-b)\cdot b^3=24b^3-b^4\Rightarrow P'=\frac{dP}{db}=72b^2-4b^3\Rightarrow P'=0\Rightarrow$$

$$72b^2-4b^3=0\Rightarrow 4b^2(18-b)=0\Rightarrow\begin{cases} b^2=0\Rightarrow b=0 \\ 18-b=0\Rightarrow b=18\end{cases}\Rightarrow P''=\frac{d^2P}{db^2}=144b-12b^2=12b\cdot(12-b)\Rightarrow$$

$$\begin{cases} P''(0)=12\cdot 0\cdot(12-0)=0\Rightarrow Ni\ máximo\ , ni\ mínimo \\ P''(0)=12\cdot 18\cdot(12-18)=216\cdot(-6)=-1296\Rightarrow Máximo\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} b=18 \\ a=24-18=6\end{cases}$$

3.- Resolver la ecuación matricial **AX = A + B** explicando las operaciones efectuadas, siendo:

$$A=\begin{pmatrix}-1&0&2\\2&-1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}\quad y\quad B=\begin{pmatrix}2&0&-2\\1&3&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$$ **[2.5 puntos]**

$$A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot(A+B)\Rightarrow X=A^{-1}\cdot(A+B)\Rightarrow$$

$$A=\begin{pmatrix}-1&0&2\\2&-1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}\quad y\quad B=\begin{pmatrix}2&0&-2\\1&3&1\\-1&1&0\end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}-1&0&2\\2&-1&0\\1&-1&1\end{vmatrix}=1-4+2=-1\neq 0\Rightarrow Existe\ A^{-1}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot adj\left(A^t\right)\Rightarrow A^t=\begin{pmatrix}-1&2&1\\0&-1&-1\\2&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$adj\left(A^t\right)=\begin{pmatrix}-1&-2&2\\-2&-3&4\\-1&-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{(-1)}\cdot\begin{pmatrix}-1&-2&2\\-2&-3&4\\-1&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&3&-4\\1&1&-1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$A+B=\begin{pmatrix}-1&0&2\\2&-1&0\\1&-1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0&-2\\1&3&1\\-1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\3&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&3&-4\\1&1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\3&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&4&0\\11&6&-1\\4&2&0\end{pmatrix}$$

4.- Estudiar la posición relativa de los planos **10x – y + 5z = 0 ; 4x – 3y - z = 0 ; -3x + 2y - 3z = 2 [2.5 puntos]**

$$\begin{cases}10x-y+5z=0\\4x-3y-z=0\\-3x+2y-3z=2\end{cases}\Rightarrow|A|=\begin{vmatrix}10&-1&5\\4&3&-1\\-3&2&-3\end{vmatrix}=-90-3+40+45+20-12=105-105=0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}10&-1&5&0\\4&3&-1&0\\-3&2&-3&2\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}10&-1&5&0\\-40&-30&10&0\\-30&20&-30&20\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}10&-1&5&0\\0&-34&30&0\\0&17&-15&20\end{array}\right)\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}10&-1&5&0\\0&-17&15&0\\0&17&-15&20\end{array}\right)\equiv$$

$$\equiv\left(\begin{array}{ccc|c}10&-1&5&0\\0&-17&15&0\\0&0&0&20\end{array}\right)\Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

$$Como\begin{cases}\frac{10}{4}\neq\frac{-1}{3}\Rightarrow El\ 1^o\ y\ el\ 2^o\ plano\ no\ son\ paralelos\\\frac{10}{-3}\neq\frac{-1}{2}\Rightarrow El\ 1^o\ y\ el\ 3^o\ plano\ no\ son\ paralelos\Rightarrow\\\frac{4}{-3}\neq\frac{3}{2}\Rightarrow El\ 2^o\ y\ el\ 3^o\ plano\ no\ son\ paralelos\end{cases}$$

$$Son\ planos\ que\ se\ cortan\ cada\ dos\ según\ rectas\ paralelas$$