OPCIÓN A

1..- Determina una función de la forma **f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c** que tenga un extremo relativo en el punto de abscisa **x = 2** y para la cual el punto **P(1 , 2)** sea un punto de inflexión **[2.5 puntos]**

$$\begin{cases} f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \\ f''(x) = 6x + 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(1) = 2 \Rightarrow 1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 2 \Rightarrow a + b + c = 1 \\ f'(2) = 0 \Rightarrow 3 \cdot 2^2 + 2a \cdot 2 + b = 0 \Rightarrow 4a + b = -12 \Rightarrow 4 \cdot (-3) + b = -12 \Rightarrow \\ f''(1) = 0 \Rightarrow 6 \cdot 1 + 2a = 0 \Rightarrow 2a = -6 \Rightarrow a = -3 \end{cases}$$

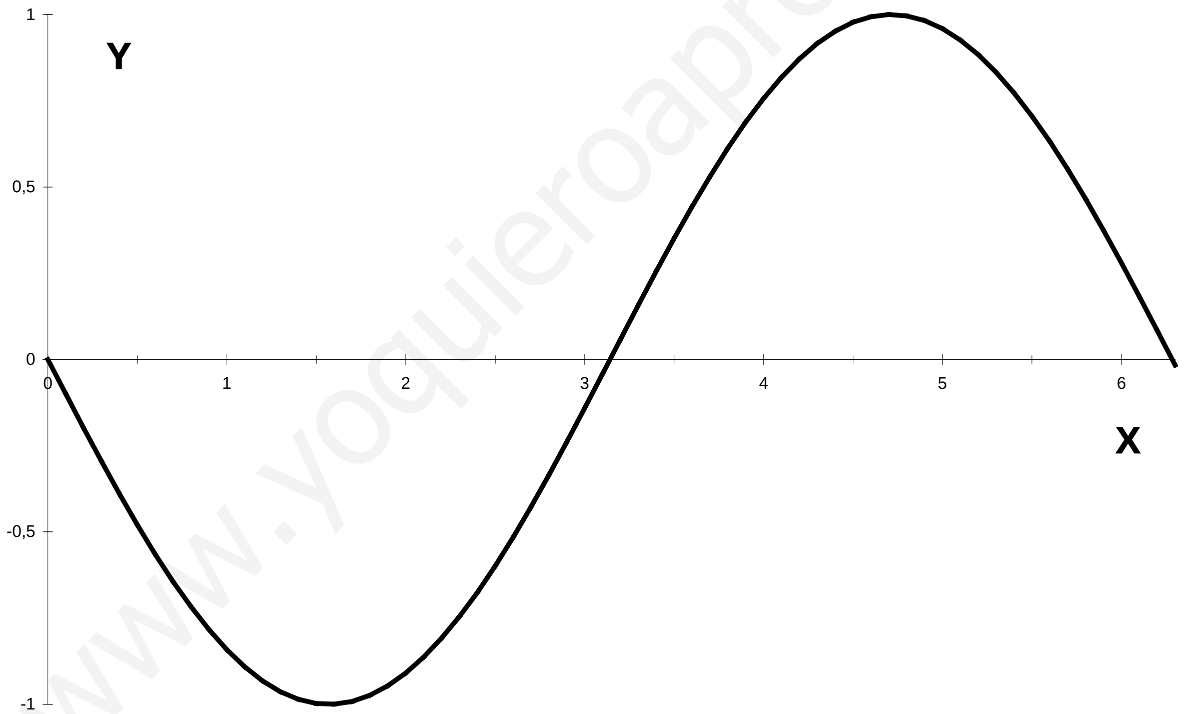
$$b = 0 \Rightarrow -3 + 0 + c = 1 \Rightarrow c = 4 \Rightarrow f'(x) = x^3 - 3x^2 + 4$$

2.- Dada la función $f(x) = cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

a) Hacer una representación aproximada de la grafica de la función entre **x = 0 y x = 2** π **[1.25 puntos]**

b) Hallar el área del recinto limitado por la gráfica de **f(x)** y el eje **OX** entre **x = 0 y x = 2** π **[1.25 puntos]**

a)



b)

$$A = \left| \int_0^{\pi} cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) dx \right| + \int_{\pi}^{2\pi} cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) dx = 2\int_{\pi}^{2\pi} cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) dx = 2 \cdot \left[sen\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \right]_{\pi}^{2\pi}$$

$$A = 2 \cdot \left[sen\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) - sen\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) \right] = 2 \cdot \left[sen\left(\frac{5\pi}{2}\right) - sen\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right] = 2 \cdot \left[sen\left(\frac{\pi}{2}\right) - sen\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right]$$

$$A = 2 \cdot [1 - (-1)] = 2 \cdot 2 = 4\ u^2$$

3.- Dada las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & k & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & k \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, se pide

a) Determinar para que valores de **k** la matriz **AB** tiene inversa **[1 punto]**

b) Resolver la ecuación **A.B.X = 3I** para **k = 0**, donde $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **[1.5 puntos]**

a)

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & k & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & k \\ 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k+6 & 2k+4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$|AB| = \begin{vmatrix} k+6 & 2k+4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = k+6-2k-4 = -k+2 \Rightarrow Si\ |AB| = 0 \Rightarrow -k+2 = 0 \Rightarrow k = 2$$

$$Para\ todo\ k \in \Re - \{2\} \Rightarrow |AB| \neq 0 \Rightarrow Existe\ (AB)^{-1}$$

b)

$$(AB)^{-1}(AB)X = 3(AB)^{-1} I \Rightarrow IX = 3(AB)^{-1} \Rightarrow X = 3 \cdot (AB)^{-1} \Rightarrow$$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{|AB|} \cdot adj\ [(AB)]^t \Rightarrow |AB| = -0+2 = 2 \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (AB)^t = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$adj\ (AB)^t = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (AB)^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow X = 3 \cdot (AB)^{-1} = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -6 \\ -3 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

4.- Dada la recta $r:\begin{cases}3x+y=3\\2x+z=2\end{cases}$ y el plano $\pi: x-3y-2z=0$

a) Comprobar que se cortan en un punto y obtener sus coordenadas **[1.5 puntos]**
b) Determinar el ángulo que forman recta y plano **[1 punto]**

$a)$

$$\begin{cases}y=3-3x\\z=2-2x\end{cases}\Rightarrow r\equiv\begin{cases}x=\lambda\\y=3-3\lambda\\z=2-2\lambda\end{cases}\Rightarrow Sustituir\ los\ valores\ de\ las\ coordenadas\ en\ la\ ecuación\ del\ plano$$

$$\lambda-3\cdot(3-3\lambda)-2\cdot(2-2\lambda)=0\Rightarrow\lambda-9+9\lambda-4+4\lambda=0\Rightarrow-13+14\lambda=0\Rightarrow14\lambda=13\Rightarrow\lambda=\frac{13}{14}$$

$$Se\ cortan\ en\ el\ punto\ P\begin{cases}x=\frac{13}{14}\\y=3-3\cdot\frac{13}{14}=\frac{3}{14}\\z=2-2\cdot\frac{13}{14}=\frac{2}{14}=\frac{1}{7}\end{cases}\Rightarrow P\left(\frac{13}{14},\frac{3}{14},\frac{1}{7}\right)$$

$b)$

$$\begin{cases}\overrightarrow{v_r}=(1,-3,-2)\\\overrightarrow{v_\pi}=(1,-3,-2)\end{cases}\Rightarrow sen\,(r,\lambda)=\frac{\left|\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_\pi}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|\cdot\left|\overrightarrow{v_\pi}\right|}=\frac{\left|(1,-3,-2)\cdot(1,-3,-2)\right|}{\sqrt{1^2+(-3)^2+(-2)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-3)^2+(-2)^2}}$$

$$sen\,(r,\lambda)=\frac{|1+9+4|}{\sqrt{1+9+4}\cdot\sqrt{1+9+4}}=\frac{14}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{14}}=1\Rightarrow angulo\,(r,\lambda)=arc\ sen\ 1=90^o=\frac{\pi}{2}$$

OPCIÓN B

1..-Dada la función: $f(x)=\dfrac{x}{1-x^2}$

a) Hallar el punto o los puntos de la gráfica de **f(x)** en los que la pendiente de la recta tangente a la curva sea igual a **1 [1.5 puntos]**
b) Hallar las asíntotas de la función dada **[1 punto]**

a)

$$f'(x)=\frac{1-x^2-(-2x)x}{(1-x^2)^2}=\frac{1-x^2+2x^2}{(1-x^2)^2}=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}\Rightarrow f'(x)=1\Rightarrow 1=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}\Rightarrow$$

$$(1-x^2)^2=1+x^2\Rightarrow 1-2x^2+x^4=1+x^2\Rightarrow x^4-3x^2=0\Rightarrow (x^2-3)x^2=0\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2-3=0\Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{3} \\ x=-\sqrt{3} \end{cases} \end{cases}$$

b)

Asíntotas verticales

$$1-x^2=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm\sqrt{1}\Rightarrow \begin{cases} x=-1\Rightarrow f(-1)=\dfrac{1}{1-(-1)^2}=\dfrac{1}{0}\Rightarrow \text{Asíntota vertical en } x=-1 \\ x=1\Rightarrow f(1)=\dfrac{1}{1-1^2}=\dfrac{1}{0}\Rightarrow \text{Asíntota vertical en } x=1 \end{cases}$$

Asíntotas horizontales

$$y=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1-x^2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{1}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}-1}=\frac{\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}-1}=\frac{0}{0-1}=\frac{0}{-1}=0\Rightarrow$$

Asíntota horizontal $\Rightarrow y=0$ *cuando* $x\to\infty$

$$y=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{1-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{1-(-x)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{1-x^2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{x}{x^2}}{\frac{1}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}-1}=\frac{-\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}-1}=$$

$$=\frac{0}{0-1}=0\Rightarrow \text{Asíntota horizontal}\Rightarrow y=0 \text{ cuando } x\to-\infty$$

Asíntotas oblicuas

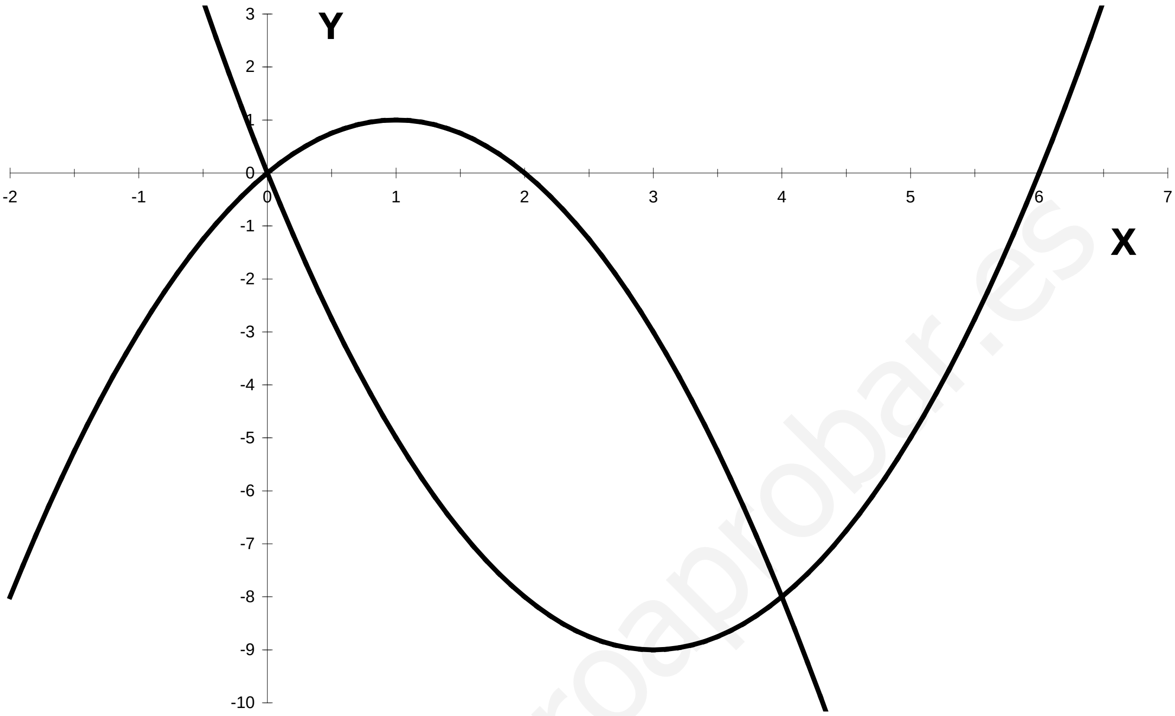
$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{1-x^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x(1-x^2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-x^2}=\frac{1}{\infty}=0\Rightarrow$$

No existe asíntota oblicua cuando $x\to\infty$

No hay asíntotas oblicuas

2.- Dadas las funciones **f(x) = x² – 6x** y **g(x) = 2x – x²**
a) Representar el recinto delimitado por sus gráficas, indicando vértices y puntos de corte con los ejes **[1.25 puntos]**
b) Calcular el área de dicho recinto **[1.25 puntos]**

a)



Vértices

$$f(x)=g(x)\Rightarrow x^2-6x=2x-x^2\Rightarrow 2x^2-8x=0\Rightarrow 2x(x-4)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\Rightarrow f(0)=g(0)=0^2-6\cdot 0=0\\ x=4\Rightarrow f(4)=g(4)=4^2-6\cdot 4=-8\end{cases}$$

$$Corte\ con\ los\ ejes\begin{cases}OX\Rightarrow y=0\Rightarrow\begin{cases}x^2-6\cdot x=0\Rightarrow(x-6)\cdot x=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x=6\end{cases}\\ 2\cdot x-x^2=0\Rightarrow(2-x)\cdot x=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x=2\end{cases}\end{cases}\\ OY\Rightarrow x=0\Rightarrow\begin{cases}0^2-6\cdot 0=0\\2\cdot 0-0^2=0\end{cases}\end{cases}$$

b)

$$A=\int_0^2\left(2x-x^2\right)dx+\left|\int_0^2\left(x^2-6\cdot x\right)dx\right|+\left|\int_2^4\left(x^2-6\cdot x\right)dx\right|-\left|\int_2^4\left(2\cdot x-x^2\right)dx\right|$$

$$A=\int_0^2\left(2x-x^2\right)dx-\int_0^2\left(x^2-6\cdot x\right)dx-\int_2^4\left(x^2-6\cdot x\right)dx+\int_2^4\left(2\cdot x-x^2\right)dx=\int_0^4\left(2\cdot x-x^2\right)dx-\int_0^4\left(x^2-6\cdot x\right)dx$$

$$A=\int_0^4\left(8x-2x^2\right)dx=8\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_0^4-2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_0^4=4\cdot\left(4^2-0^2\right)-\frac{2}{3}\cdot\left(4^3-0^3\right)=64-\frac{128}{3}=\frac{54}{3}=18\ u^2$$

Ejercicio 3.- Dado el sistema: $\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x-2y+z=3 \\ 5x-5y+2z=m \end{cases}$

a) Discutirlo según los valores de **m [1.5 puntos]**
b) Resolverlo para **m = 10 [1 punto]**

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -5 & 2 \end{vmatrix} = -8+5+5-10+10-2 = 0 \Rightarrow Veamos\ por\ Gauss$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & -5 & 2 & m \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 6 \\ 10 & -10 & 4 & 2m \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 5 \\ 0 & -15 & 9 & 2m-5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2m-5-15 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$2m-20=0 \Rightarrow m=10 \Rightarrow$$

$$Si\ m=10 \Rightarrow rang(A) = rang(A/B) = 2 < Número\ incognitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Indeterminado$$

$$Si\ m \neq 10 \Rightarrow rang(A) = 2 \neq rang(A/B) = 3 \Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

b)

$$Si\ m=10 \Rightarrow rang(A) = rang(A/B) = 2 < Número\ incognitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Indeterminado$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow -5y+3z=5 \Rightarrow 5y=3z-5 \Rightarrow y=\frac{3}{5}z-1 \Rightarrow 2x+\frac{3}{5}z-1-z=1 \Rightarrow 2x-\frac{2}{5}z=2 \Rightarrow$$

$$2x=\frac{2}{5}z+2 \Rightarrow x=\frac{1}{5}z+1 \Rightarrow Solución\left(\frac{\lambda}{5}+1\ ,\ \frac{3\lambda}{5}-1\ ,\ \lambda\right)$$

Ejercicio 4.- Dada las rectas: $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-2}$ y $s: \begin{cases} x = -\frac{2}{3} - 4t \\ y = \frac{5}{3} + t \\ z = 3t \end{cases}$

a) Estudiar la posición relativa de ambas rectas **[1.75 puntos]**
b) Hallar una recta que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular a **r** y **s**
[0.75 puntos]

a) Primero analizaremos si son paralelas para ello veremos si sus vectores directores son iguales o proporcionales, de ser así buscaremos si tienen un punto común que de existir haría que fueran coincidentes, de no ser así ratificamos el paralelismo.
Si no son paralelas o coincidentes buscaremos si tienen un punto común que de existir tendríamos dos rectas que son secantes o se cortan. De no tenerlo son rectas que se cruzan.

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (2, 3, -2) \\ \overrightarrow{v_s} = (-4, 1, 3) \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{-4} \neq \frac{3}{1} \Rightarrow \textit{No son coincidentes ni paralelas}$$

Veamos si tienen un punto común

$$\begin{cases} r: \begin{cases} x = 1 + 2s \\ y = -1 + 3s \\ z = -2s \end{cases} \\ s: \begin{cases} x = -\frac{2}{3} - 4t \\ y = \frac{5}{3} + t \\ z = 3t \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + 2s = -\frac{2}{3} - 4t \\ -1 + 3s = \frac{5}{3} + t \\ -2s = 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6s + 12t = -5 \\ 9s - 3t = 8 \\ 2s + 3t = 0 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 9 & -3 & 8 \\ 6 & 12 & -5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 18 & -6 & 16 \\ 6 & 12 & -5 \end{array}\right) \equiv$$

$$\equiv \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -33 & 16 \\ 0 & 3 & -5 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -33 & 16 \\ 0 & 33 & -55 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 0 \\ 0 & -33 & 16 \\ 0 & 0 & -39 \end{array}\right) \Rightarrow \textit{Sistema Incompatible} \Rightarrow \textit{No hay punto de corte}$$

No son secantes

Son rectas que se cruzan

b)
El vector director de la recta **t** es perpendicular a los vectores directores de las rectas **r** y **s**, lo hallaremos mediante el producto vectorial de esos vectores.

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (2, 3, -2) \\ \overrightarrow{v_s} = (-4, 1, 3) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_t} = \overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & -2 \\ -4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 9\vec{i} + 8\vec{j} + 2\vec{k} + 12\vec{k} + 2\vec{i} - 6\vec{j} = 11\vec{i} + 2\vec{j} + 14\vec{k} \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{v_t} = (11, 2, 14) \Rightarrow t = \begin{cases} x = 0 + 11\lambda = 11\lambda \\ y = 0 + 2\lambda = 2\lambda \\ z = 0 + 14\lambda = 14\lambda \end{cases}$$