

Opción A

1.- Estudiar la derivabilidad de la siguiente función en todo su dominio, dando expresiones de la

$$\text{derivada donde exista } f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{3} \cdot e^{-2x} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x+1}{3} + \ln(x+1) & \text{si } 0 < x < 2 \text{ [2'5 puntos]} \\ \sqrt{x^2 - 2x} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Primero habrá que analizar si es continua en todo el recorrido, porque si no hay continuidad en alguno de los puntos de discontinuidad no es derivable en ese punto

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \operatorname{sen} 2 \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot e^{-2 \cdot 0} = \operatorname{sen} 0 + \frac{1}{3} \cdot e^0 = 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \frac{0+1}{3} + \ln(0+1) = \frac{1}{3} + \ln 1 = \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3} \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{2+1}{3} + \ln(2+1) = 1 + \ln 3 \\ f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \sqrt{2^2 - 2 \cdot 2} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \text{Es continua en } x = 0$$

$$\Rightarrow 1 + \ln 3 \neq 0 \Rightarrow \text{No es continua en } x = 2$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2 \cos 2x - \frac{2}{3} \cdot e^{-2x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{x+1} & \text{si } 0 < x < 2 \\ \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}} & \text{si } x > 2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 2 \cos 2 \cdot 0 - \frac{2}{3} \cdot e^{-2 \cdot 0} = 2 \cos 0 - \frac{2}{3} \cdot e^0 = 2 \cdot 1 - \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{4}{3} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{0+1} = \frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3} \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = \frac{2-1}{\sqrt{2^2-2 \cdot 2}} = \frac{1}{0} \end{array} \right. \Rightarrow \text{Es derivable en } x = 0$$

$$\Rightarrow \text{No es derivable en } x = 2 \text{ por no ser continua}$$

2.- Hallar las dimensiones del rectángulo de área máxima situado en el primer cuadrante, que tenga un vértice en el origen de coordenadas, un vértice sobre el eje **OX**, otro sobre el eje **OY** y otro sobre la recta de ecuación **4x + 3y = 12** [2'5 puntos]

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x = 12 - 3y \Rightarrow x = 3 - \frac{3}{4}y \Rightarrow A = \left(3 - \frac{3}{4}y\right)y \Rightarrow A' = \frac{dA}{dy} = -\frac{3}{4}y + \left(3 - \frac{3}{4}y\right) = 3 - \frac{6}{4}y \Rightarrow A' = 0 \Rightarrow \\ A = xy \end{array} \right.$$

$$3 - \frac{3}{2}y = 0 \Rightarrow \frac{3}{2}y = 3 \Rightarrow y = \frac{6}{3} = 2 \Rightarrow A'' = \frac{d^2A}{dy^2} = -\frac{6}{4} < 0 \Rightarrow \text{Máximo} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 3 - \frac{3}{4} \cdot 2 = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \end{cases}$$

3.- Dado el sistema:
$$\begin{cases} 3x - ay = -3 \\ 2x + ay - 5z = 13 \\ x + 3y - 2z = 5 \end{cases}$$

a) Estudiar su compatibilidad según los valores del parámetro **a** [1'75 puntos]

b) Resolverlo para **a = 9** [0'75 puntos]

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -a & 0 \\ 2 & a & -5 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -6a + 5a + 45 - 4a = 45 - 5a \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow 45 - 5a = 0 \Rightarrow 5a = 45 \Rightarrow a = 9$$

(Para todo) $\forall a \in \mathbb{R} - \{9\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sist. Compat. Determinado}$

Si $a = 9$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -9 & 0 & -3 \\ 2 & 9 & -5 & 13 \\ 1 & 3 & -2 & 5 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -9 & 0 & -3 \\ -6 & -27 & 15 & -39 \\ -3 & -9 & 6 & -15 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -9 & 0 & -3 \\ 0 & -45 & 15 & -45 \\ 0 & -18 & 6 & -18 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -9 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -9 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) =$$

$$0z = 0 \Rightarrow z = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Infinitas soluciones} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

b) Si $a = 9 \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -9 & 0 & -3 \\ 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow -3y + z = -3 \Rightarrow z = -3 + 3y \Rightarrow 3x - 9y = -3 \Rightarrow 3x = -3 + 9y \Rightarrow x = -1 + 3y$$

$$\text{Solución} \Rightarrow (x, y, z) = (-1 + 3\lambda, \lambda, -3 + 3\lambda)$$

4.- Dado los puntos **A**(-1 , 2 , 0) y **B**(2 , 1 , -1)

a) Determinar si el punto **C**(5 , 0 , -2) está alineado con los anteriores, explicando el motivo (hacer un dibujo esquemático de la situación) **[0'75 puntos]**

b) Hallar las ecuaciones de la recta que contiene a los puntos **A** y **B**, en forma continua, en forma paramétrica y como intersección de dos planos **[1'25 puntos]**

c) Hallar la ecuación en forma general del plano que pasa por **B** y es perpendicular a la recta **AB** **[0'5 puntos]**

a) Si están alineados los tres puntos los vectores que forman **AB** y **AC** son iguales o proporcionales

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (2, 1, -1) - (-1, 2, 0) = (3, -1, -1) \\ \overrightarrow{AC} = (5, 0, -2) - (-1, 2, 0) = (6, -2, -2) \end{cases} \Rightarrow \frac{3}{6} = \frac{-1}{-2} = \frac{-1}{-2} \Rightarrow \text{Están alineados A, B y C}$$

b)

$$\text{Forma continua} \Rightarrow r \equiv \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{-1} \quad \text{Forma paramétrica} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -1 + 3\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

$$\text{Intersección de planos} \Rightarrow \begin{cases} -x-1 = 3y-6 \\ -x-1 = 3z \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x+3y-5=0 \\ x+3z+1=0 \end{cases}$$

c) El vector director de la recta **r** (que pasa por **A** y **B**) es, al ser perpendicular al plano, el vector del plano π y este es perpendicular al vector **BG** siendo **G** el punto genérico del plano y por lo tanto el producto escalar de ambos es nulo y la ecuación pedida del plano

$$\begin{cases} \vec{v}_\pi = \vec{v}_r = \overrightarrow{AB} = (3, -1, -1) \equiv (-3, 1, 1) \\ \overrightarrow{BG} = (x, y, z) - (2, 1, -1) = (x+2, y-1, z+1) \end{cases} \Rightarrow \vec{v}_\pi \perp \overrightarrow{BG} \Rightarrow \vec{v}_\pi \cdot \overrightarrow{BG} = 0$$

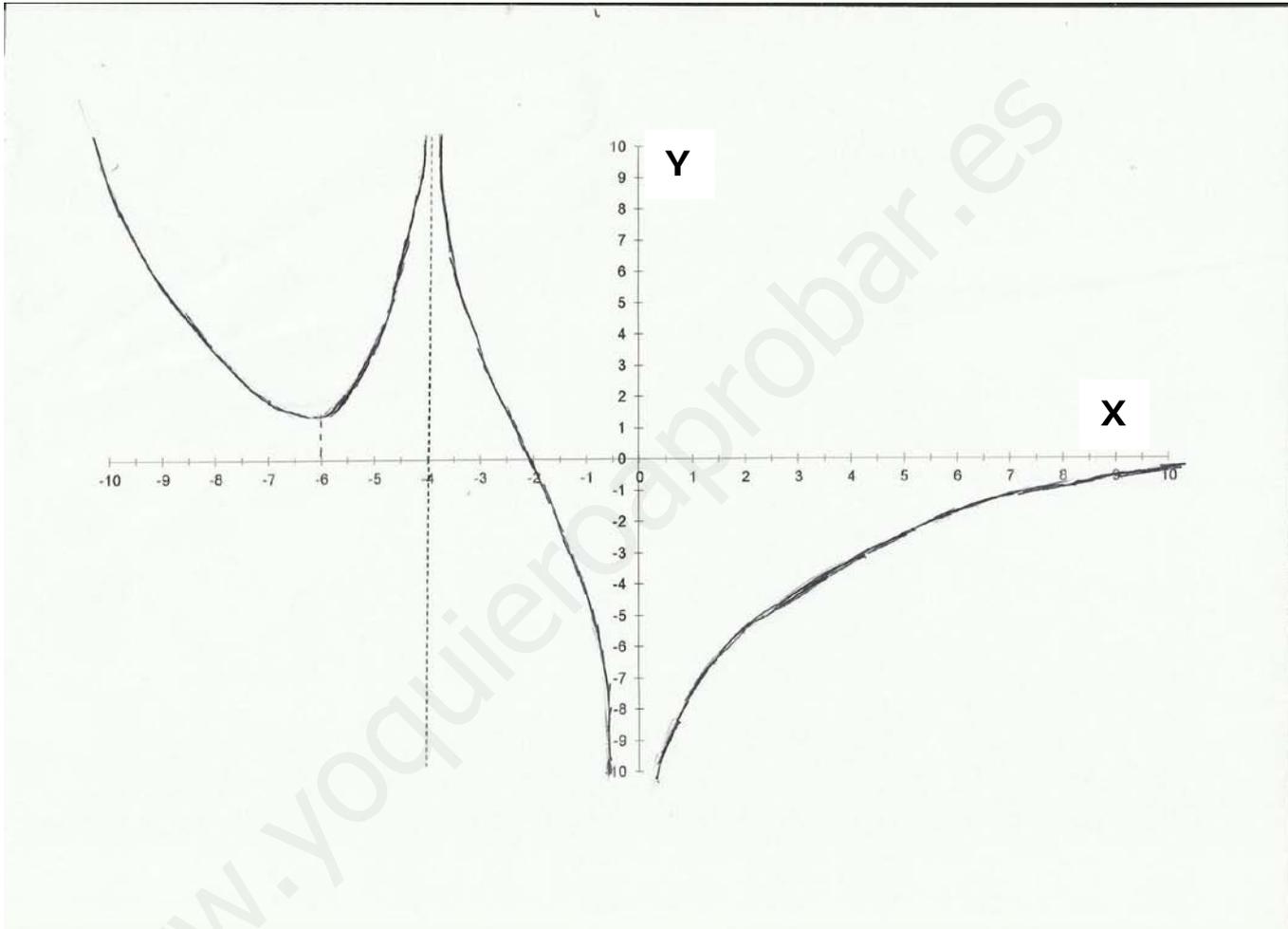
$$(-3, 1, 1) \cdot (x+2, y-1, z+1) = 0 \Rightarrow -3(x+2) + y-1 + z+1 = 0 \Rightarrow \pi \equiv 3x - y - z + 6 = 0$$

Opción B

1.-Representar la gráfica de una función $f(x)$ que tenga las siguientes propiedades:

- Es continua en todos los reales salvo -4 y 0
- Tiene asíntotas verticales $x = -4$ y $x = 0$
- Para $x \rightarrow +\infty$, se cumple $f(x) = 0$
- Su función derivada es negativa en $(-\infty, -6)$ y en $(-4, 0)$, siendo positiva $(-6, -4)$, y en $(0, +\infty)$

[2.5 puntos]



2.- Se desea hacer una ventana con forma de triángulo rectángulo, de modo que el lado mayor sea de 2 metros ¿Cuáles deben de ser las dimensiones de los otros dos lados para que la ventana tenga área máxima? [2'5 puntos]

La hipotenusa mide 2 m., los catetos se denominaran x e y

$$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 2^2 \Rightarrow y^2 = 4 - x^2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{4 - x^2} \Rightarrow \begin{cases} y = \sqrt{4 - x^2} \\ y = -\sqrt{4 - x^2} \Rightarrow \text{No se toma por valor negativo} \end{cases} \\ A = \frac{1}{2} x y \end{array} \right.$$

$$A = \frac{1}{2} x \sqrt{4 - x^2} \Rightarrow A' = \frac{dA}{dx} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{4 - x^2} + \frac{(-2x)}{2\sqrt{4 - x^2}} x \right) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{4 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{4 - x^2 - x^2}{\sqrt{4 - x^2}} \right)$$

$$A' = \frac{1}{2} \left(\frac{4 - 2x^2}{\sqrt{4 - x^2}} \right) = \frac{2}{2} \left(\frac{2 - x^2}{\sqrt{4 - x^2}} \right) = \frac{2 - x^2}{\sqrt{4 - x^2}} \Rightarrow A' = 0 \Rightarrow \frac{2 - x^2}{\sqrt{4 - x^2}} = 0 \Rightarrow 2 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow$$

$$x = \pm\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \Rightarrow \text{No se toma por valor negativo} \end{cases} \Rightarrow$$

$$A'' = \frac{d^2 A}{dx^2} = \frac{-2x \sqrt{4 - x^2} - \frac{(-2x)}{2\sqrt{4 - x^2}} (2 - x^2)}{4 - x^2} = \frac{-2x \sqrt{4 - x^2} + \frac{x(2 - x^2)}{\sqrt{4 - x^2}}}{4 - x^2} = \frac{-2x(4 - x^2) + x(2 - x^2)}{(4 - x^2)\sqrt{4 - x^2}}$$

$$A'' = \frac{-8x + 2x^3 + 2x - x^3}{(4 - x^2)\sqrt{4 - x^2}} = \frac{x^3 - 6x}{(4 - x^2)\sqrt{4 - x^2}} \Rightarrow A''(\sqrt{2}) = \frac{(\sqrt{2})^3 - 6(\sqrt{2})}{[4 - (\sqrt{2})^2]\sqrt{4 - (\sqrt{2})^2}} = \frac{2(\sqrt{2}) - 6(\sqrt{2})}{(4 - 2)\sqrt{4 - 2}}$$

$$A''(\sqrt{2}) = \frac{-4(\sqrt{2})}{2\sqrt{2}} = -2 < 0 \Rightarrow \text{Máximo} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \text{ m.} \\ y = \sqrt{4 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{4 - 2} = \sqrt{2} \text{ m.} \end{cases}$$

Es un triángulo rectángulo isósceles

3.- Dada las matrices: $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

a) Calcular la inversa de **A** paso a paso [1'5 puntos]

b) Resolver la ecuación **A · X = B + C** [1 punto]

a) Para que exista una inversa de una matriz su determinante debe de ser distinto de cero

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 6 - 1 - 3 = 2 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (\text{adj } A^t) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\text{adj } A^t = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

b)

$$A^{-1}AX = A^{-1}(B+C) \Rightarrow IX = A^{-1}(B+C) \Rightarrow X = A^{-1}(B+C)$$

$$B+C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 6 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 6 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$X = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 17 & 5 & 20 \\ -5 & -1 & -4 \\ 17 & 7 & 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{2} & \frac{5}{2} & 10 \\ -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & -2 \\ \frac{17}{2} & \frac{7}{2} & 16 \end{pmatrix}$$

4.- Dada la siguiente recta $r : \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x + y - 2z = 1 \end{cases}$ y el punto $P(-1, 2, 3)$

Hallar la ecuación en forma general del plano que las contiene [2.5 puntos]

Para obtener la ecuación del plano π tomaremos el vector director de la recta r , el vector que une uno cualquiera de sus puntos R (tomaremos el indicado en su ecuación) con el punto P y el vector formado por este y el punto G genérico del plano. Como estos tres vectores son coplanarios (están en el mismo plano) el vector \overrightarrow{PG} es combinación lineal de los otros dos y, por ello, el determinante de la matriz que forman es nulo y la ecuación pedida

$$r : \begin{cases} 4x - 6y + 2z = 0 \\ x + y - 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow 5x - 5y = 1 \Rightarrow 5x = 5y + 1 \Rightarrow x = y + \frac{1}{5} \Rightarrow y + \frac{1}{5} + y - 2z = 1 \Rightarrow 2y - 2z = 1 - \frac{1}{5}$$

$$2z = 2y - \frac{4}{5} \Rightarrow z = y - \frac{2}{5} \Rightarrow r : \begin{cases} x = \frac{1}{5} + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -\frac{2}{5} + \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v}_r = (1, 1, 1) \\ R\left(\frac{1}{5}, 0, -\frac{2}{5}\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (1, 1, 1) \\ \overrightarrow{PR} = \left(\frac{1}{5}, 0, -\frac{2}{5}\right) - (-1, 2, 3) = \left(\frac{6}{5}, -2, -\frac{17}{5}\right) \equiv (6, -10, -17) \equiv (-6, 10, 17) \Rightarrow \\ \overrightarrow{PG} = (x, y, z) - (-1, 2, 3) = (x+1, y-2, z-3) \end{cases}$$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-3 \\ 6 & -10 & -17 \\ -6 & 10 & 17 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 17(x+1) - 6(y-2) + 10(z-3) + 6(z-3) - 10(x+1) - 17(y-2) = 0$$

$$7(x+1) - 23(y-2) + 16(z-3) = 0 \Rightarrow \pi \equiv 7x - 23y + 16z + 5 = 0$$