OPCIÓN A

1..- Estudiar la derivabilidad de la siguiente función en todo su dominio, dando expresiones de la derivada donde exista $\begin{cases} 1+sen^2 x & si \quad x \le 0 \\ \sqrt{x^3+1} & si \quad 0 < x < 1 \\ e^{x^2-1} & si \quad x \ge 1 \end{cases}$ **[2'5 puntos]**

Para que sea derivable, primeramente tiene que ser continua

$$\begin{cases} f(0) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1+sen^2 0 = 1+0 = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \sqrt{0^3+1} = 1 \end{cases} \Rightarrow f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 \Rightarrow Es\ continua\ en\ x=0$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \sqrt{1^3+1} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \\ f(1) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = e^{1^2-1} = e^0 = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x) = \sqrt{2} \ne f(1) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = 1 \Rightarrow No\ es\ continua\ en\ x=1$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2sen\ x\ cos\ x & si \quad x<0 \\ \dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}} & si \quad 0<x<1 \\ 2xe^{x^2-1} & si \quad x>1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f'(x) = 2sen\ 0\ cos\ 0 = 2\cdot 0\cdot 1 = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f'(x) = \dfrac{3\cdot 0^2}{2\sqrt{0^3+1}} = \dfrac{3\cdot 0}{2\sqrt{0+1}} = \dfrac{0}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0 \Rightarrow En\ x=0\ es\ derivable$$

$$En\ x=1\ no\ lo\ es\ porque\ no\ cumple\ la\ condición\ de\ continuidad$$

2.- Calcular las siguientes integrales

$$a)\ \int x\ ln\ x\ dx \quad (1\ punto) \qquad b) \int \frac{3}{x^2+4}\,dx \quad (1'5\ puntos)$$

$a)$

$$\int x\ ln\ x\ dx = \frac{1}{2}x^2\ ln\ x - \int \frac{1}{2}x^2 \frac{dx}{x} = \frac{1}{2}x^2\ ln\ x - \frac{1}{2}\int x\ dx = \frac{1}{2}x^2\ ln\ x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}x^2\left(ln\ x - \frac{1}{2}\right) + K$$

$$Por\ partes \Rightarrow \begin{cases} ln\ x = u \Rightarrow \dfrac{dx}{x} = du \\ x\ dx = dv \Rightarrow v = \displaystyle\int x\ dx = \frac{1}{2}x^2 \end{cases}$$

$b)$

$$x^2+4=0 \Rightarrow x^2 = -4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-4} \Rightarrow Solución\ compleja \Rightarrow No\ hay\ solución\ real$$

$$3\int \frac{dx}{x^2+4} = 3\int \frac{dx}{4\left(\dfrac{x^2}{4}+1\right)} = \frac{3}{4}\int \frac{dx}{\left(\dfrac{x}{2}\right)^2+1} = \frac{3}{4}\int \frac{2\ dt}{t^2+1} = \frac{6}{4}\int \frac{dt}{t^2+1} = \frac{3}{2}\ arc\ tg\ t = \frac{3}{2}\ arc\ tg\left(\frac{x}{2}\right) + K$$

$$\frac{x}{2} = t \Rightarrow dx = 2\ dt$$

3.- Dada las matrices $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, se pide

a) Resolver el sistema $\begin{cases} 2X-3Y=A \\ 3X+4Y=B \end{cases}$ **[1'5 puntos]**

b) Calcular el rango de **M = A.B [1 punto]**

$a)$

$$\begin{cases} 8X-12Y=4A \\ 9X+12Y=3B \end{cases} \Rightarrow 17X=4A+3B \Rightarrow 17X=4\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$17X=\begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 12 & 4 & -4 \\ 8 & 4 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 6 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & 9 \\ 6 & -6 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 12 & 7 & 5 \\ 14 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow X=\frac{1}{17}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \\ 12 & 7 & 5 \\ 14 & -2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{2}{17} & -\frac{3}{17} & \frac{7}{17} \\ \frac{12}{17} & \frac{7}{17} & \frac{5}{17} \\ \frac{14}{17} & -\frac{2}{17} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 6X-9Y=3A \\ -6X-8Y=-2B \end{cases} \Rightarrow -17Y=3\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow -17Y=\begin{pmatrix} -3 & 0 & 3 \\ 9 & 3 & -3 \\ 6 & 3 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 6 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$-17Y=\begin{pmatrix} -7 & 2 & 1 \\ 9 & 1 & -9 \\ 2 & 7 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow Y=\left(-\frac{1}{17}\right)\cdot\begin{pmatrix} -7 & 2 & 1 \\ 9 & 1 & -9 \\ 2 & 7 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow Y=\begin{pmatrix} \frac{7}{17} & -\frac{2}{17} & -\frac{1}{17} \\ -\frac{9}{17} & -\frac{1}{17} & \frac{9}{17} \\ -\frac{2}{17} & -\frac{7}{17} & \frac{2}{17} \end{pmatrix}$$

$$M=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 5 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$rang\,(M)=2$$

4.- Dados la recta $r : \frac{x-2}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$ y el punto **P(1 , 2 , 3)**

a) Hallar la ecuación en forma general del plano que los contiene **[1 punto]**
b) Hallar las ecuaciones, en forma continua**,** en forma paramétrica y como intersección de dos planos correspondientes a la recta que pasa por **P** y es perpendicular al plano anterior
[1'5 puntos]

a) Para hallar la ecuación del plano π, utilizaremos el vector director de la recta, el vector que une a un punto **R** cualquiera de la recta r (tomaremos el indicado en su ecuación) con el punto **P** y el vector formado por este ultimo punto y el punto **G** generico del plano. Estos tres vectores son coplanarios (pertenecen al mismo plano) por lo que el ultimo vector es combinación lineal de los otros dos y, por ello, el determinante de la matriz que forman es nulo y la ecuación del plano pedida

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (3 , -1 , 2) \\ \overrightarrow{PR} = (2 , 0 , 1) - (1 , 2 , 3) = (1 , -2 , -2) \equiv (-1 , 2 , 2) \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \\ \overrightarrow{PG} = (x , y , z) - (1 , 2 , 3) = (x-1 , y-2 , z-3) \end{cases}$$

$$-2(x-1) - 2(y-2) + 6(z-3) - (z-3) - 4(x-1) - 6(y-2) = 0 \Rightarrow -6(x-1) - 8(y-2) + 5(z-3) = 0 \Rightarrow$$

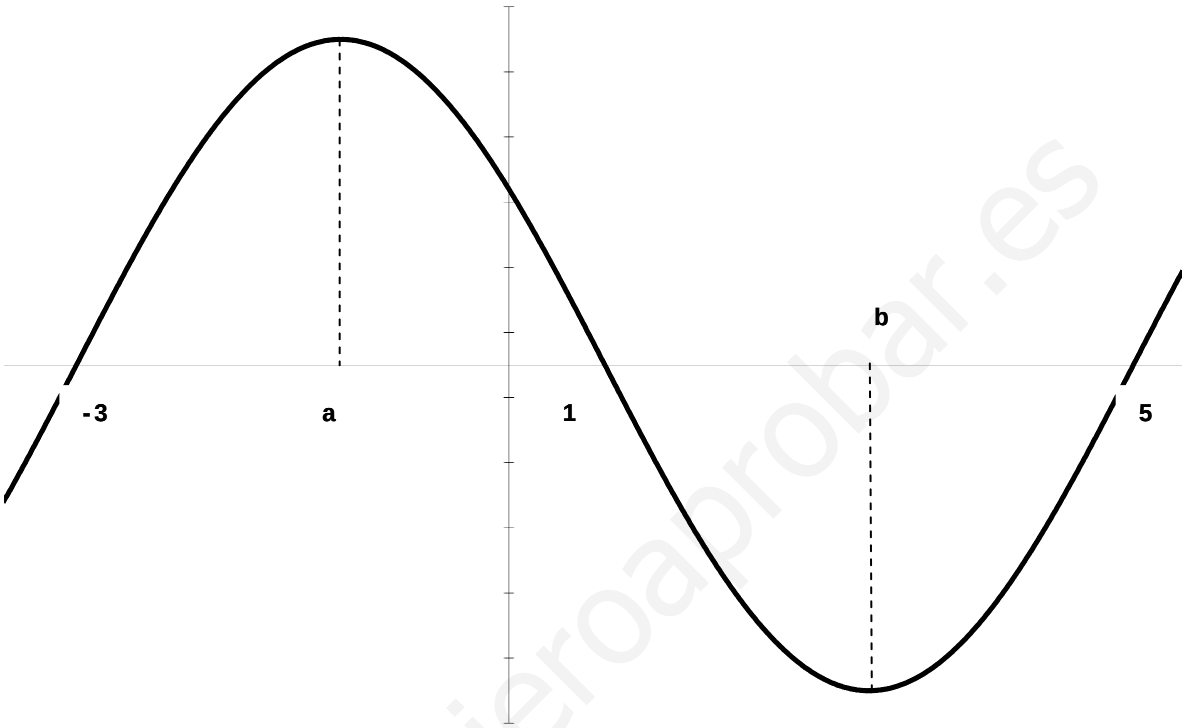
$$\pi \equiv 6x + 8y - 5z - 7 = 0$$

b) Llamemos s a la recta

$$\overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{v_\pi} = (6 , 8 , -5) \Rightarrow \begin{cases} Forma\ continua \Rightarrow \frac{x-1}{6} = \frac{y-2}{8} = \frac{z-3}{-5} \\ Forma\ paramétrica \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 6\lambda \\ y = 2 + 8\lambda \\ z = 3 - 5\lambda \end{cases} \\ Intersección\ de\ dos\ planos \Rightarrow \begin{cases} 8x - 8 = 6y - 12 \Rightarrow 8x - 6y + 4 = 0 \\ -5x + 5 = 6z - 18 \Rightarrow 5x + 6z - 23 = 0 \end{cases} \end{cases}$$

OPCIÓN B

1..-Indicar, para una función **f(x)**, sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento, los valores de **x** que corresponden a sus máximos y mínimos relativos, así como sus intervalos de concavidad y convexidad, sabiendo que su función derivada tiene la siguiente gráfica:
(a = -1’33 y b = 3’3) [2’5 puntos]



$$Crecimiento \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re / (-3 < x < 1) \cup (x > 5)$$
$$Decrecimiento \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow \forall x \in \Re / (x < -3) \cup (1 < x < 5)$$

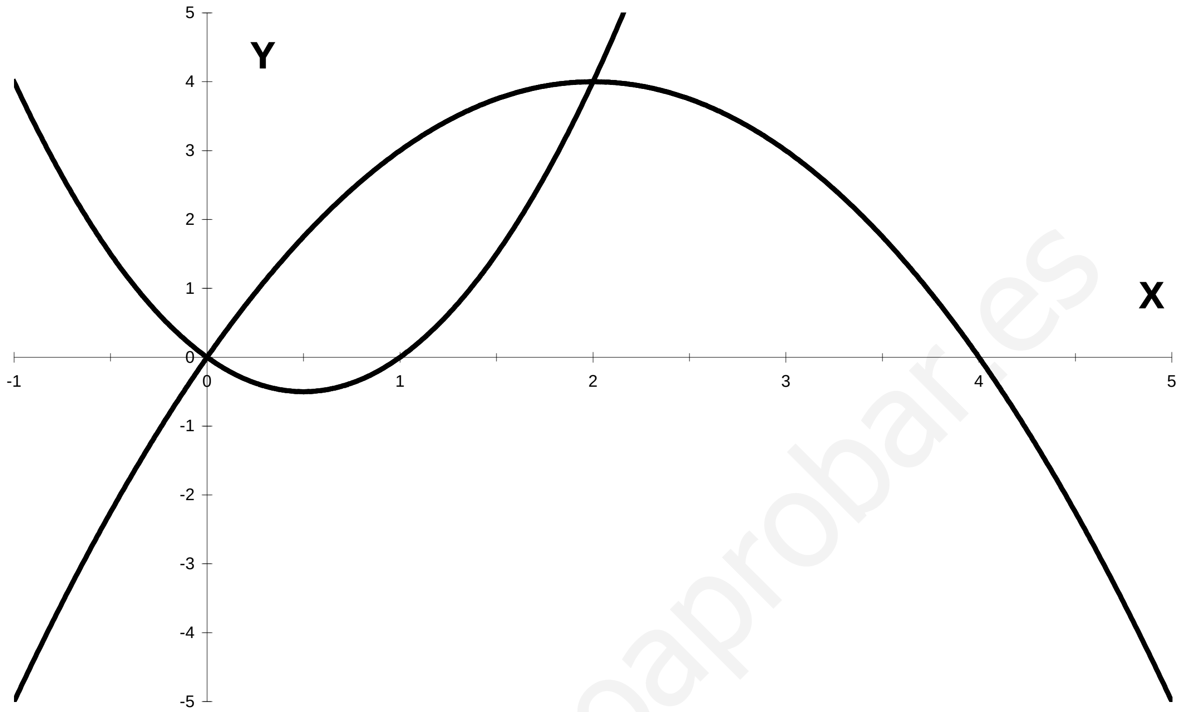
$$Mínimo\ relativo\ x = -3 \rightarrow (De\ decrecimiento\ pasa\ a\ crecimiento)$$
$$Máximo\ relativo\ x = 1 \rightarrow (De\ crecimiento\ pasa\ a\ decrecimiento)$$
$$Mínimo\ relativo\ x = 5 \rightarrow (De\ decrecimiento\ pasa\ a\ crecimiento)$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1'33 = -\frac{4}{3} \Rightarrow Punto\ de\ inf\ lexión \\ b = 3'33 = \frac{13}{3} \Rightarrow Punto\ de\ inf\ lexión \end{cases}$$

$$Concavidad \Rightarrow f''(x) > 0 \Rightarrow \forall x \in \Re / (x < -1'33) \cup (x > 4'33)$$
$$Convexidad \Rightarrow f''(x) < 0 \Rightarrow \forall x \in \Re / -1'33 < x < 4'33$$

2.- Dadas las funciones **$y = -x^2 + 4x$** y **$y = 2x^2 - 2x$**
a) Representar la región que determinan sus gráficas **[1'5 puntos]**
b) Calcular el área de dicho región **[1 punto]**

a)



$$Llamando \begin{cases} f(x) = -x^2 + 4x \\ g(x) = 2x^2 - 2x \end{cases} \Rightarrow Puntos\ de\ corte \Rightarrow \begin{cases} De\ f \begin{cases} Con\ OY \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = -0^2 + 4 \cdot 0 = 0 \\ Con\ OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 = -x^2 + 4x \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases} \end{cases} \\ De\ g \begin{cases} Con\ OY \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = 2 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 = 0 \\ Con\ OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 = 2x^2 - 2x \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f'(x) = -2x + 4 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow f''(x) = -2 < 0 \Rightarrow Máximo\ \left(2\ , -2^2 + 4 \cdot 2\right) \\ g'(x) = 4x - 2 \Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow 4x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow g''(x) = 4 > 0 \Rightarrow Mínimo\ \left(\frac{1}{2}\ , 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)\right) \end{cases}$$

Continuación del ejercicio 2 de la opción B

$b)$

$$Puntos\ de\ corte\ entre\ funciones \Rightarrow -x^2+4x=2x^2-2x \Rightarrow 3x^2-6x=0 \Rightarrow 3(x-2)x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

$$A=\int_0^1\left(-x^2+4x\right)dx+\left|\int_0^1\left(2x^2-2x\right)dx\right|+\int_1^2\left(-x^2+4x\right)dx-\int_1^2\left(2x^2-2x\right)dx$$

$$A=\int_0^1\left(-x^2+4x\right)dx-\int_0^1\left(2x^2-2x\right)dx+\int_1^2\left(-x^2+4x\right)dx-\int_1^2\left(2x^2-2x\right)dx$$

$$A=\int_0^2\left(-x^2+4x\right)dx-\int_0^2\left(2x^2-2x\right)dx=\int_0^2\left(-x^2+4x-2x^2+2x\right)dx=\int_0^2\left(-3x^2+6x\right)dx$$

$$A=\int_0^2\left(-3x^2+6x\right)dx=-3\cdot\frac{1}{3}\cdot\left[x^3\right]_0^2+6\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]_0^2=-\left(2^3-0^3\right)+3\cdot\left(2^2-0^2\right)=-8+12=4\ u^2$$

Ejercicio 3.- Dado el sistema: $\begin{cases} ax-3y+az=1 \\ 3x+2y=1 \\ x-y+z=-1 \end{cases}$

a) Estudiar su compatibilidad según los valores del parámetro **a [1'75 puntos]**
b) Resolverlo cuando sea compatible **[0'75 puntos]**

$a)$

$$|A|=\begin{vmatrix} a & -3 & a \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=2a-3a-2a+9=-3a+9 \Rightarrow Si\ |A|=0 \Rightarrow -3a+9=0 \Rightarrow 3a=9 \Rightarrow a=3$$

$$(Para\ todo)\forall a\in\Re-\{9\} \Rightarrow |A|\neq 0 \Rightarrow rang(A)=3=Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sist.Comp.\ Deter\min ado$$

$Si\ a=3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & -3 & 3 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow 0z=4 \Rightarrow z=\frac{4}{0} \Rightarrow Sin\ solución \Rightarrow$$

$Sistema\ Incompatible$

Continuación del ejercicio 3 de la opción B

$$b)\ Cuando\ es\ Compatible\ Deter\min ado \Rightarrow \forall a \in \Re - \{3\}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & a \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-3a+9} = \frac{2-a+2a+3}{-3(a-3)} = \frac{a+5}{-3(a-3)}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-3a+9} = \frac{a-2a-a-3}{-3(a-3)} = \frac{-2a-5}{-3(a-3)} = \frac{2a+5}{3(a-3)}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{-3a+9} = \frac{-2a-3-3-2+a-9}{-3(a-3)} = \frac{-a-17}{-3(a-3)} = \frac{a+17}{3(a-3)}$$

Ejercicio 4.- Dada las rectas secantes:

$$r: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-1}{1} \quad y \quad s:(x,y,z) = (1,-1,0) + \lambda(-1,6,2)$$

a) Calcular su punto de intersección **[1.75 puntos]**
b) Hallar la ecuación del plano que las contiene **[0.75 puntos]**

a) Llamando **P** al punto de intersección

$$\begin{cases} r: \begin{cases} x = 2-s \\ y = 5+2s \\ z = 1+s \end{cases} \\ s: \begin{cases} x = 1-\lambda \\ y = -1+6\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2-s = 1-\lambda \\ 5+2s = -1+6\lambda \\ 1+s = 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -s+\lambda = -1 \\ 2s-6\lambda = -6 \\ s-2\lambda = -1 \end{cases} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\equiv \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow -2\lambda = -4 \Rightarrow \lambda = 2 \Rightarrow P \begin{cases} x = 1-2 \\ y = -1+6\cdot 2 \\ z = 2\cdot 2 \end{cases} \Rightarrow P(-1,11,4)$$

Continuación del ejercicio 4 de la opción B

b)
Para hallar la ecuación del plano π contaremos con los vectores directores de las dos rectas y el vector formado por **P** y **G**, siendo este el punto genérico del plano y como los tres son coplanarios el vector **PG** es combinación lineal de los otros dos y por ello el determinante de la matriz que forman los tres vectores es nulo y la ecuación pedida del plano

$$\left\{\begin{array}{r} \overrightarrow{v_r} = (-1\ ,2\ ,1) \\ \overrightarrow{v_s} = (-1\ ,6\ ,2) \\ \overrightarrow{PG} = (x\ ,y\ ,z) - (-1\ ,11\ ,4) = (x+1\ ,y-11\ ,z-4) \end{array}\right. \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y-11 & z-4 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$4\,(x+1) - (y-11) - 6\,(z-4) + 2\,(z-4) - 6\,(x+1) + 2\,(y-11) = 0 \Rightarrow -2\,(x+1) + (y-11) - 4\,(z-4) = 0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv 2x - y + 4z - 3 = 0$$