OPCIÓN A

1..- (a) Calcular la ecuación de la recta tangente a la función $y=\sqrt{x^2+1}$ en su punto extremo.(1 punto)

(b) Calcular $\lim_{x\to 4} = \left(\frac{x+2}{6}\right)^{\frac{1}{x-4}}$ (0,75 puntos)

(c) Calcular $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)$ (0,75 puntos)

$a)$

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow \textit{Máximo o mínimo} \Rightarrow y'=0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y(0)=\sqrt{0^2+1}=1 \\ y'(0)=\frac{0}{\sqrt{0^2+1}}=0 \end{cases} \Rightarrow y-1=0\cdot(x-0) \Rightarrow y-1=0 \Rightarrow y=1$$

$b)$

$$\lim_{x\to 4}\left(\frac{x+2}{6}\right)^{\frac{1}{x-4}}=\left(\frac{4+2}{6}\right)^{\frac{1}{4-4}}=\left(\frac{6}{6}\right)^{\frac{1}{0}}=1^{\infty} \Rightarrow \textit{Llamando } L=\lim_{x\to 4}\left(\frac{x+2}{6}\right)^{\frac{1}{x-4}} \Rightarrow \ln L=\ln\left[\lim_{x\to 4}\left(\frac{x+2}{6}\right)^{\frac{1}{x-4}}\right]$$

$$\ln L=\lim_{x\to 4}\ln\left[\left(\frac{x+2}{6}\right)^{\frac{1}{x-4}}\right]=\lim_{x\to 4}\frac{1}{x-4}\cdot\ln\frac{x+2}{6}=\lim_{x\to 4}\frac{\ln\frac{x+2}{6}}{x-4}=\frac{\ln\frac{4+2}{6}}{4-4}=\frac{\ln\frac{6}{6}}{0}=\frac{\ln 1}{0}=\frac{0}{0}=$$

$$=\xrightarrow{\textit{Aplicando L'Hopital}}=\lim_{x\to 4}\frac{\frac{1}{\frac{x+2}{6}}\cdot\frac{1}{6}}{1}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{x+2}=\frac{1}{4+2}=\frac{1}{6}\Rightarrow$$

$$\ln L=\frac{1}{6}\Rightarrow L=\lim_{x\to 4}\left(\frac{x+2}{6}\right)^{\frac{1}{x-4}}=e^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{e}$$

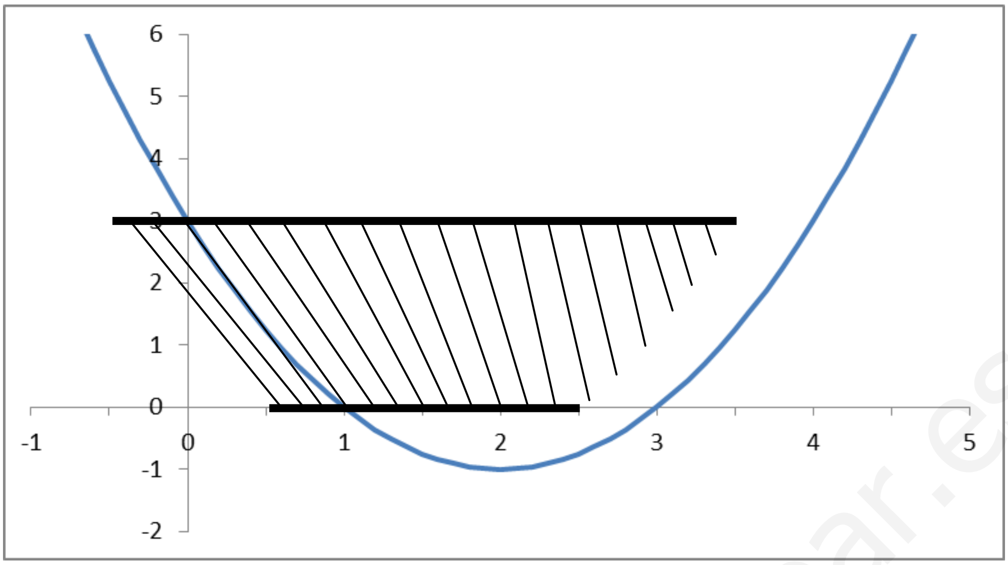
$c)$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2-1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)=\frac{0^2-1}{0^2}-\frac{1}{0}=-\frac{1}{0}-\frac{1}{0}=-\infty-\infty=-\infty$$

Quiero suponer que el enunciado del problema es incorrecto y este podría ser

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+1}{x^2}-\frac{1}{x}\right)=\frac{0^2+1}{0^2}-\frac{1}{0}=\frac{1}{0}-\frac{1}{0}=\infty-\infty=\lim_{x\to 0}\frac{x^3+x-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to 0}x=0$$

2.- La siguiente gráfica corresponde a la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$ representada respecto a los ejes coordenados. Calcular el área de la parte sombreada. **(2,5 puntos)**



$$\text{Puntos de corte con los ejes} \Rightarrow \begin{cases} OY \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3 \\ OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 = x^2 - 4x + 3 \Rightarrow x = \dfrac{4 \pm \sqrt{4}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4+2}{2} = 3 \\ x = \dfrac{4-2}{2} = 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Ecuación rectas} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{Puntos de corte entre funciones} \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 3 \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow (x-4)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$$

$$A = \int_0^1 3\,dx - \int_0^1 \left(x^2 - 4x + 3\right) dx + \int_1^3 3\,dx + \int_3^4 3\,dx - \int_3^4 \left(x^2 - 4x + 3\right) dx$$

$$\text{Como} \int_0^1 \left(-x^2 + 4x\right) dx = \int_3^4 \left(-x^2 + 4x\right) dx$$

$$A = \int_0^1 \left(-x^2 + 4x\right) dx + \int_1^3 3\,dx + \int_3^4 \left(-x^2 + 4x\right) dx = 2\int_0^1 \left(-x^2 + 4x\right) dx + \int_1^3 3\,dx$$

$$A = -2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left[x^3\right]_0^1 + 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[x^2\right]_0^1 + 3 \cdot \left[x\right]_1^3 = -\frac{1}{3} \cdot \left(1^3 - 0^3\right) + 4 \cdot \left(1^2 - 0^2\right) + 3 \cdot (3-1) = -\frac{1}{3} + 4 + 6 = \frac{29}{3}\ u^2$$

3.- Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & m & 1 \\ -1 & 3 & -m \end{pmatrix}$

a) Determinar los valores del parámetro ***m*** para los que la matriz ***A*** tiene inversa. (1,5 puntos)
b) Calcular la inversa de la matriz ***A*** para ***m = 2*** (1 punto)

a) Una matriz tiene inversa cuando su determinante es distinto de cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & m & 1 \\ -1 & 3 & -m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 3 & 4-m \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} m & 1 \\ 3 & 4-m \end{vmatrix} = m(4-m) - 3 = -m^2 + 4m - 3 \Rightarrow$$

$$Si\ |A| = 0 \Rightarrow -m^2 + 4m - 3 = 0 \Rightarrow m^2 - 4m + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 \geq 0 \Rightarrow$$

$$m = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} \Rightarrow \begin{cases} m = \dfrac{4+2}{2} = 3 \\ m = \dfrac{4-2}{2} = 1 \end{cases}$$

$$\forall m \in \Re - \{1\ ,\ 3\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow Existe\ A^{-1}$$

$b)$

$$Cuando\ m = 2 \Rightarrow |A| = -2^2 + 4 \cdot 2 - 3 = -4 + 8 - 3 = 1 \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot adj\ A^t \Rightarrow$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow adj\ A^t = \begin{pmatrix} -7 & 12 & -8 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} -7 & 12 & -8 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 12 & -8 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

4.- Dados el punto ***P(2 , 2 , −2)*** y la recta: $r:\begin{cases}2x+y+z=-2\\ x+3y+z=0\end{cases}$

a) Hallar la ecuación del plano π_1 que contiene a ***r*** y pasa por ***P***. (1,25 puntos)

b) Hallar la ecuación del plano π_2 que contiene a ***P*** y es perpendicular a ***r***. (1,25 puntos)

a) De los planos determinados por el haz que tiene en común a la recta **r** hallamos el que pasa por el punto **P**

$$r:\begin{cases}2x+y+z+2=0\\ x+3y+z=0\end{cases} \Rightarrow Haz\ de\ planos \Rightarrow 2x+y+z+2+\lambda\,(x+3y+z)=0 \Rightarrow$$

$$Pasando\ por\ P(2\,,2\,,2) \Rightarrow 2\cdot 2+2+2+2+\lambda\,(2+3\cdot 2+2)=0 \Rightarrow 10+10\lambda=0 \Rightarrow 10\lambda=-10 \Rightarrow$$

$$\lambda=-1 \Rightarrow 2x+y+z+2+(-1)(x+3y+z)=0 \Rightarrow 2x+y+z+2-x-3y-z=0 \Rightarrow$$

$$\pi_1: x-2y+2=0$$

b) El plano π_2 queda determinado por el vector director de **r**, que es su vector director que es perpendicular al vector **PG**, siendo **G** el punto genérico del plano, siendo el producto escalar, de ambos, nulo y la ecuación buscada.
El vector de la recta y del plano, ya que son iguales, se halla como el producto vectorial de los vectores que definen a los planos que determinan la recta.

$$\overrightarrow{v_{\pi_2}}=\overrightarrow{v_r}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 3 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}+\vec{j}+6\vec{k}-\vec{k}-3\vec{i}-2\vec{j}=-2\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{v_{\pi_2}}=(-2\,,-1\,,5)\equiv(2\,,1\,,-5) \Rightarrow$$

$$\begin{cases}\overrightarrow{v_{\pi_2}}=(2\,,1\,,-5)\\ \overrightarrow{PG}=(x\,,y\,,z)-(2\,,2\,,2)=(x-2\,,y-2\,,z-2)\end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_{\pi_2}}\perp\overrightarrow{PG} \Rightarrow \overrightarrow{v_{\pi_2}}\cdot\overrightarrow{PG}=0 \Rightarrow$$

$$(2\,,1\,,-5)\cdot(x-2\,,y-2\,,z-2)=0 \Rightarrow 2x-4+y-2-5z+10=0 \Rightarrow \pi_2: 2x+y-5z+4=0$$

OPCIÓN B

1..- Dada la función $f(x)=\begin{cases}(x+a)^2 & si \quad x\le -1\\ \dfrac{bx}{\sqrt{x+2}} & si \quad x>-1\end{cases}$.Hallar valores de ***a*** y de ***b*** para que ***f (x)*** sea derivable en todo **R**. **(2,5 puntos)**

Para que sea derivable, primeramente tiene que ser continua, y después tener su derivada igual en los puntos de posible discontinuidad, en esta función en **x = -1**

Continuidad

$$\begin{cases} f(1)=\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=(-1+a)^2\\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\dfrac{b\cdot(-1)}{\sqrt{-1+2}}=-b\end{cases} \Rightarrow f(1)=\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^+} f(x)\Rightarrow (a-1)^2=-b$$

Derivabilidad

$$f'(x)=\begin{cases} 2(x+a) \quad si \quad x<-1\\ \dfrac{b\sqrt{x+2}-\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}bx}{x+2}=\dfrac{\dfrac{2b(x+2)-bx}{2\sqrt{x+2}}}{x+2}=\dfrac{2bx+4b-bx}{2(x+2)\sqrt{x+2}}=\dfrac{b(x+4)}{2(x+2)\sqrt{x+2}} \quad si \quad x>-1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to -1^-} f'(x)=2(-1+a)\\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\dfrac{b(-1+4)}{2(-1+2)\sqrt{-1+2}}=\dfrac{3b}{2}\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to -1^-} f'(x)=\lim_{x\to -1^+} f'(x)\Rightarrow 2(a-1)=\frac{3b}{2}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} 4a-4=3b\\ -(a-1)^2=b\end{cases}\Rightarrow 4a-4=-3(a^2-2a+1)\Rightarrow 3a^2-6a+3+4a-4=0\Rightarrow 3a^2-2a-1=0\Rightarrow$$

$$\Delta=(-2)^2-4\cdot 3\cdot(-1)=4+12=16\ge 0\Rightarrow a=\frac{2\pm\sqrt{16}}{2\cdot 3}\Rightarrow\begin{cases} a=\dfrac{2+4}{6}=1\\ a=\dfrac{2-4}{6}=-\dfrac{2}{6}=-\dfrac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow$$

$$Soluciones\Rightarrow\begin{cases} a=1\Rightarrow b=-(1-1)^2=0\Rightarrow f(x)=\begin{cases}(x+1)^2 & si \quad x\le -1\\ 0 \quad si & x>-1\end{cases}\\ a=-\dfrac{1}{3}\Rightarrow b=-\left(-\dfrac{1}{3}-1\right)^2=-\dfrac{16}{9}\Rightarrow f(x)=\begin{cases}\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2 & si \quad x\le -1\\ \dfrac{-\dfrac{16x}{9}}{\sqrt{x+2}} & si \quad x>-1\end{cases}\end{cases}$$

2.- Entre todos los rectángulos de área 8 m^2 hallar las dimensiones del que minimiza el producto de las diagonales. (2,5 puntos)

Siendo B la base y H la altura del rectángulo y D cada una de las diagonales, calcularemos el que tenga la menor.

$$\begin{cases} 8 = BH \Rightarrow H = \dfrac{8}{B} \\ D = \sqrt{B^2 + H^2} \\ P = D^2 = \left(\sqrt{B^2 + H^2}\right)^2 = B^2 + H^2 \end{cases} \Rightarrow P = B^2 + \left(\frac{8}{B}\right)^2 \Rightarrow B^2 + \frac{64}{B^2} \Rightarrow P' = \frac{dP}{dB} = 2B + \frac{-64 \cdot 2B}{B^4}$$

$$P' = 2B - \frac{128}{B^3} = \frac{2B^4 - 128}{B^3} = 2\frac{B^4 - 64}{B^3} \Rightarrow P' = 0 \Rightarrow 2\frac{B^4 - 64}{B^3} = 0 \Rightarrow B^4 - 64 = 0 \Rightarrow B^4 = 64 \Rightarrow$$

$$B = \pm\sqrt[4]{2^6} = \pm\sqrt[4]{2^6} = \pm 2\sqrt[4]{2^2} \Rightarrow \begin{cases} B = 2\sqrt{2} \\ B = -2\sqrt{2} \Rightarrow No\ es\ solución \end{cases} \Rightarrow P'' = \frac{d^2P}{dB^2} = 2 - \frac{128 \cdot (-3) \cdot B^2}{B^6} = 2 + \frac{384}{B^4}$$

$$P''\left(2\sqrt{2}\right) = 2 + \frac{384}{\left(2\sqrt{2}\right)^4} = 2 + \frac{384}{2^4 \cdot \sqrt{2^4}} = 2 + \frac{384}{2^6} = 2 + 6 = 8 > 0 \Rightarrow Mínimo \Rightarrow$$

$$\begin{cases} B = 2\sqrt{2}\ m \\ H = \dfrac{8}{2\sqrt{2}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}\ m \end{cases}$$

Ejercicio 3.- Dado el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} y+z=1 \\ (m-1)x+y+z=m \\ x+(m-1)y-z=0 \end{cases}$

a) Discutirlo según los valores de ***m***. (1,5 puntos)
b) Resolverlo para ***m = 2*** (1 punto)

$a)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ m-1 & 1 & 1 \\ 1 & m-1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ m-1 & 0 & 0 \\ 1 & m & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} m-1 & 0 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m\,(m-1) \Rightarrow Si\ |A| = 0 \Rightarrow m\,(m-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} m=0 \\ m-1=0 \Rightarrow m=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\forall m \in \Re - \{0\,,1\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rang\,(A) = 3 = Número\ de\ incognitas \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$$Si\ m = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow rang\,(A) = 2 \neq rang\,(A/B) = 3 \Rightarrow Sistema\ Incompatible$$

$$Si\ m = 1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow rang\,(A) = rang\,(A/B) = 2 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ In\det er\min ado$$

$b)$

$$Si\ m = 2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow rang\,(A) = 3 \Rightarrow Sistema\ Compatible\ Deter\min ado$$

$$x = 1 \Rightarrow 1 + 2y = 1 \Rightarrow 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 + z = 1 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow$$

$$Solución \Rightarrow (x\,,\,y\,,\,z) = (1\,,0\,,1)$$

Ejercicio 4.- Dadas las rectas: $r : \dfrac{x}{5} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z}{4}$ y $s : \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$

a) Determinar la ecuación general del plano paralelo a las rectas ***r*** y ***s*** y que pasa por el origen de coordenadas. (1,5 puntos)
b) Hallar el ángulo que forman ***r*** y ***s***. (1 punto)

a) El plano π queda determinado por los vectores directores de las rectas **r** y **s** y el vector **OG** siendo **G** el punto genérico del plano y **O** el origen de coordenadas.
Como los tres vectores son coplanarios y este último es combinación lineal de los otros dos el determinante de la matriz que forman es nulo y la ecuación pedida del plano.

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (5, 3, 4) \\ \overrightarrow{v_s} = (3, 0, 0) \\ \overrightarrow{OG} = (x, y, z) - (0, 0, 0) = (x, y, z) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 12y - 9z = 0 \Rightarrow \pi : 4y - 3z = 0$$

b) El coseno del ángulo que forman sus vectores directores es el cociente entre su producto escalar y el producto de sus módulos

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_r} = (5, 3, 4) \\ \overrightarrow{v_s} = (3, 0, 0) \end{cases} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right| \cdot \left|\overrightarrow{v_s}\right|} = \frac{\left|(5, 3, 4) \cdot (3, 0, 0)\right|}{\sqrt{5^2 + 3^2 + 4^2} \cdot \sqrt{3^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{|15|}{\sqrt{50} \cdot 3} = \frac{15}{3 \cdot 5 \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\alpha = arc\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 45^{\circ} = \frac{\pi}{4}\, rad$$