Pruebas de Acceso a la Universidad. Mayores de 25 años

CURSO: 2022/2023

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

EJERCICIO 1:

Opción A)

i) Calcule las matrices A y B sabiendo que:

$$A-B=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 2 & -1\\ -2 & 3 & 1 & -3\end{pmatrix} \text{ y } 2A+3B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 9 & 3\\ 6 & 6 & -8 & -1\end{pmatrix}. \qquad \text{(7 puntos)}$$

ii) Calcule BB^T (3 puntos)

Opción B)

Un joven decide invertir 3500 euros en tres carteras de inversión (C1, C2 y C3). Al cabo de un año, los intereses le han proporcionado un beneficio de 160 euros. Por su inversión en la cartera C1 recibe unos intereses anuales del 2%, por su inversión en C2, del 5% y por su inversión en C3, del 8%. Determine cuánto dinero invirtió en cada cartera, sabiendo que los intereses que ha recibido en la cartera C3 son 40 euros más que la suma de los intereses recibidos por las otras dos inversiones. (10 puntos)

EJERCICIO 2:

Opción A)

i) Determine qué valor debe tomar el parámetro *a* para que la función $y=ax^2-5ax+4$ corte al eje de abscisas en $x=4$. Calcule los puntos extremos de la función. (6 puntos)

ii) Aplicando la definición de derivada, calcule la derivada de *f(x)* en *x = 2*, para el valor del parámetro *a = 3*. (4 puntos)

Opción B)

Considere las siguientes tres funciones:

$$f(x)=\begin{cases}5-x & si \quad x<5\\ x^2-25 & si \quad x\geq 5\end{cases}, \qquad g(x)=e^{3x} \qquad y \qquad h(x)=sen(4x)+\sqrt{2-x}$$

i) Estudie la continuidad y derivabilidad de *f(x)*. (4 puntos)
ii) Represente la función $f(x)$. (2 puntos)
iii) Calcule la derivada de la función $\dfrac{x^2-25}{g(x)}+h(x)$. (4 puntos)

EJERCICIO 3:

Opción A)

Una empresa tiene dos departamentos (A y B). El departamento A tiene 60 empleados, de los cuales 15 teletrabajan. El departamento B tiene 25 empleados, de los cuales 5 teletrabajan. Se seleccionan al azar dos empleados del departamento A y uno del departamento B. Calcule:

i) La probabilidad de que ninguno de los tres empleados teletrabaje. (2 puntos)
ii) La probabilidad de que únicamente uno de ellos teletrabaje. (4 puntos)
iii) La probabilidad de alguno de ellos teletrabaje. (4 puntos)

(Escriba las fórmulas necesarias)

Opción B)

El índice de masa corporal de los estudiantes de una región sigue una distribución normal con varianza 36. A partir de los datos obtenidos de una muestra de 49 estudiantes, se ha calculado un índice de masa corporal medio de 25.

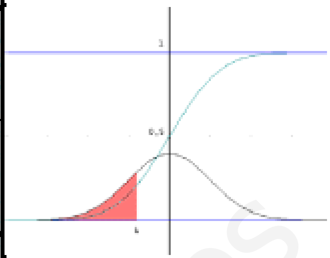
i) Calcule el intervalo de confianza para la media poblacional con un nivel de confianza del 96%. (5 puntos)
ii) Determine cuál debe ser el tamaño de la muestra para que se mantenga el error máximo, con un nivel de confianza del 94 %. (5 puntos)

(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

El estudiante elegirá una opción de cada uno de estos tres ejercicios. La nota final será la media aritmética simple de las puntuaciones obtenidas en las tres opciones elegidas.

Tabla de la distribución normal estándar Z =N(0, 1)

$$P(Z<k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{k} e^{-t^2/2}\,dt$$



k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
-3,5	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
-3,4	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002
-3,3	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003
-3,2	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005
-3,1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007
-3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010
-2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
-2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
-2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
-2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
-2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
-2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
-2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
-2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
-1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
-1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
-1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
-1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
-1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
-1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
-1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
-1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
-1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
-1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
-0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
-0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
-0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
-0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
-0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
-0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998

SOLUCIONES

EJERCICIO 1:

Opción A)

i) Calcule las matrices A y B sabiendo que:

$$A-B=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 2 & -1\\ -2 & 3 & 1 & -3\end{pmatrix} \text{ y } 2A+3B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 9 & 3\\ 6 & 6 & -8 & -1\end{pmatrix}. \qquad \text{(7 puntos)}$$

ii) Calcule BB^T (3 puntos)

i) Despejamos A y B del sistema matricial.

$$\left.\begin{array}{l} A-B=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 2 & -1\\ -2 & 3 & 1 & -3\end{pmatrix}\\ 2A+3B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 9 & 3\\ 6 & 6 & -8 & -1\end{pmatrix}\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3A-3B=3\begin{pmatrix}-1 & 3 & 2 & -1\\ -2 & 3 & 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 9 & 6 & -3\\ -6 & 9 & 3 & -9\end{pmatrix}\\ 2A+3B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 9 & 3\\ 6 & 6 & -8 & -1\end{pmatrix}\end{array}\right\}$$

$$5A \quad =\begin{pmatrix}-5 & 10 & 15 & 0\\ 0 & 15 & -5 & -10\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{A=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}-5 & 10 & 15 & 0\\ 0 & 15 & -5 & -10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 3 & -1 & -2\end{pmatrix}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}-1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 3 & -1 & -2\end{pmatrix}-B=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 2 & -1\\ -2 & 3 & 1 & -3\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}-1 & 2 & 3 & 0\\ 0 & 3 & -1 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & 3 & 2 & -1\\ -2 & 3 & 1 & -3\end{pmatrix}=B\Rightarrow \boxed{B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -2 & 1\end{pmatrix}}$$

ii)

$$B=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -2 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow B^T=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 0\\ 1 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$BB^T=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 2\\ -1 & 0\\ 1 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0+1+1+1 & 0+0-2+1\\ 0+0-2+1 & 4+0+4+1\end{pmatrix}$$

$$2\times\boxed{4 \qquad \cdot\; 4}\times 2\longrightarrow 2\times 2$$

$$\boxed{BB^T==\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 9\end{pmatrix}}$$

Opción B)
Un joven decide invertir 3500 euros en tres carteras de inversión (C1, C2 y C3). Al cabo de un año, los intereses le han proporcionado un beneficio de 160 euros. Por su inversión en la cartera C1 recibe unos intereses anuales del 2%, por su inversión en C2, del 5% y por su inversión en C3, del 8%. Determine cuánto dinero invirtió en cada cartera, sabiendo que los intereses que ha recibido en la cartera C3 son 40 euros más que la suma de los intereses recibidos por las otras dos inversiones. (10 puntos)

Llamamos "x" al dinero invertido en la cartera C1, "y" a lo invertido en C2 y "z" a lo invertido en C3.

"Un joven decide invertir 3500 € en tres carteras de inversión (C1, C2 y C3)" → $x+y+z=3500$

"Ha obtenido un beneficio de 160 € → $0.02x+0.05y+0.08z=160$

"Los intereses que ha recibido en la cartera C3 son 40 euros más que la suma de los intereses recibidos por las otras dos inversiones" → $z=x+y+40$

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=3500 \\ 0.02x+0.05y+0.08z=160 \\ 0.08z=0.02x+0.05y+40 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=3500-y-z \\ 2x+5y+8z=16000 \\ 8z=2x+5y+4000 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2(3500-y-z)+5y+8z=16000 \\ 8z=2(3500-y-z)+5y+4000 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 7000-2y-2z+5y+8z=16000 \\ 8z=7000-2y-2z+5y+4000 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3y+6z=9000 \\ 10z-3y=11000 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y+2z=3000 \to y=3000-2z \\ 10z-3y=11000 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10z-3(3000-2z)=11000 \Rightarrow 10z-9000+6z=11000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16z=20000 \Rightarrow \boxed{z=\frac{20000}{16}=1250} \Rightarrow \boxed{y=3000-2\cdot 1250=500} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=3500-500-1250=1750}$$

El joven ha invertido 1750 € en la cartera C1, 500 € en la cartera C2 y 1250 € en la cartera C3.

EJERCICIO 2:

Opción A)

i) Determine qué valor debe tomar el parámetro *a* para que la función $y = ax^2 - 5ax + 4$ corte al eje de abscisas en $x = 4$. Calcule los puntos extremos de la función. (6 puntos)

ii) Aplicando la definición de derivada, calcule la derivada de *f(x)* en *x = 2*, para el valor del parámetro *a = 3*. (4 puntos)

i) Si la función corta el eje de abscisas en *x = 4* significa que la función pasa por el punto (4, 0).

$$\left. \begin{array}{l} y = ax^2 - 5ax + 4 \\ (4,0) \end{array} \right\} \Rightarrow 0 = a \cdot 4^2 - 5a \cdot 4 + 4 \Rightarrow 0 = 16a - 20a + 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = -4a + 4 \Rightarrow 4a = 4 \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

La función queda $y = x^2 - 5x + 4$.
Hallamos sus extremos usando la derivada.

$$\left. \begin{array}{l} y' = 2x - 5 \\ y' = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x - 5 = 0 \Rightarrow \boxed{x = \frac{5}{2} = 2.5}$$

$y'' = 2 > 0 \rightarrow$ En $x = 2.5$ Hay un mínimo relativo.

$x = 2.5 \Rightarrow y = 2.5^2 - 5 \cdot 2.5 + 4 = -2.25 \Rightarrow \boxed{(2.5, -2.25) \text{ es el mínimo de la función}}$

ii) Para *a = 3* la función queda $y = 3x^2 - 15x + 4$.

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 15x + 4 - (3 \cdot 2^2 - 15 \cdot 2 + 4)}{x - 2} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 15x + 4 + 14}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{3x^2 - 15x + 18}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{3(x^2 - 5x + 6)}{x - 2} ..$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(6)}}{2} = \dfrac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \dfrac{5+1}{2} = 3 = x \\ \dfrac{5-1}{2} = 2 = x \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2) \end{array}}$$

$$\ldots = \lim_{x \to 2} \frac{3(x-3)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} = \lim_{x \to 2} 3(x-3) = \boxed{-3}$$

Opción B)
Considere las siguientes tres funciones:

$$f(x)=\begin{cases}5-x & si \quad x<5 \\ x^2-25 & si \quad x\geq 5\end{cases}, \qquad g(x)=e^{3x} \qquad y \qquad h(x)=sen(4x)+\sqrt{2-x}$$

i) Estudie la continuidad y derivabilidad de *f(x)*. (4 puntos)
ii) Represente la función $f(x)$. (2 puntos)
iii) Calcule la derivada de la función $\dfrac{x^2-25}{g(x)}+h(x)$. (4 puntos)

i) Para que la función sea continua debe serlo en *x = 5*.

$$\left.\begin{array}{l} f(5)=5^2-25=0 \\ \lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 5^-} 5-x=0 \\ \lim\limits_{x\to 5^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 5^+} x^2-25=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(5)=\lim_{x\to 5^-} f(x)=\lim_{x\to 5^+} f(x)=0$$

La función es continua en *x = 5* y por tanto continua en todo su dominio.

La función es derivable en $\mathbb{R}-\{5\}$ y su derivada es $f'(x)=\begin{cases}-1 & si \quad x<5 \\ 2x & si \quad x>5\end{cases}$.

Comprobamos si es derivable en *x = 5* viendo si coinciden sus derivadas laterales.

$$\left.\begin{array}{l} f'(5^-)=\lim\limits_{x\to 5^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 5^-} -1=-1 \\ f'(5^+)=\lim\limits_{x\to 5^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 5^+} 2x=10 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(5^-)=-1\neq 10=f'(5^+)$$

La función no es derivable en *x = 5*.

La función es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R}-\{5\}$.

ii) La función *f(x)* es un trozo de recta y un trozo de parábola.

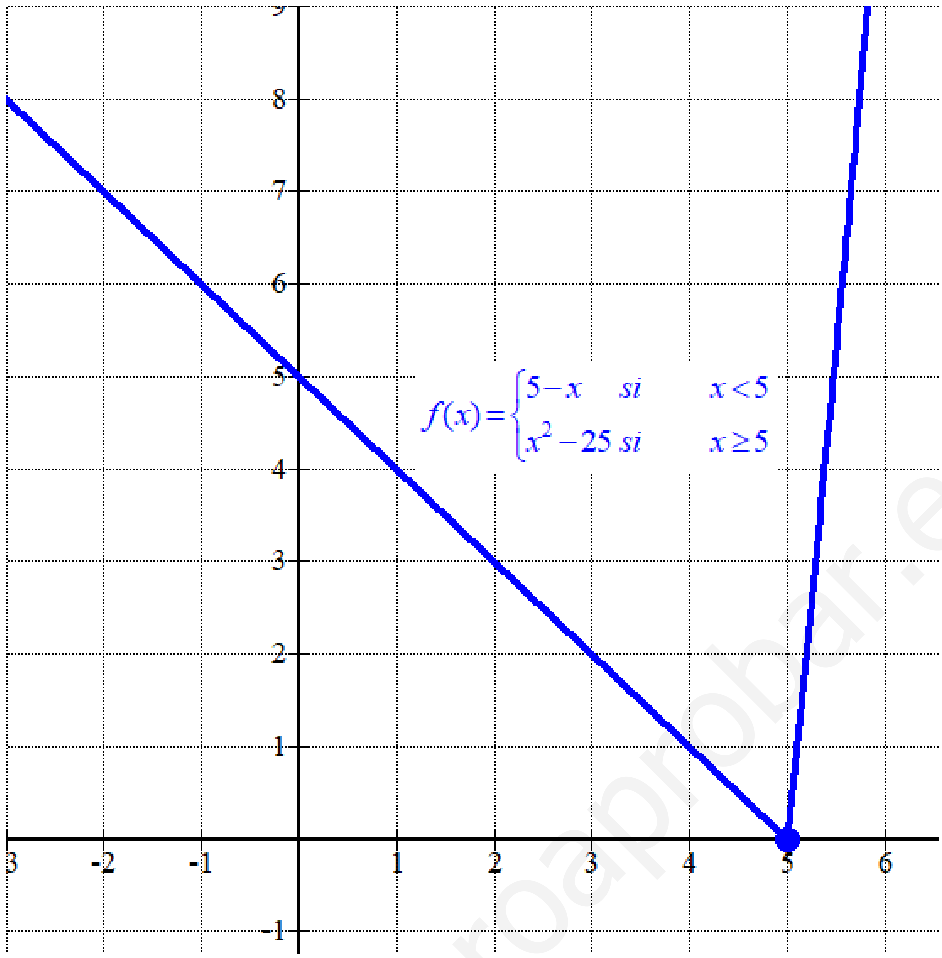
Hacemos una tabla de valores y representamos su gráfica.

$x<5$

x	$y=5-x$
3	2
5	0(No incluido)

$x\geq 5$

x	$y=x^2-25$
5	0
6	11
7	24


$f(x)=\begin{cases}5-x & si \quad x<5\\ x^2-25 & si \quad x\geq 5\end{cases}$
8
7
6
5
4
3
2
1
-1
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
6

EJERCICIO 3:

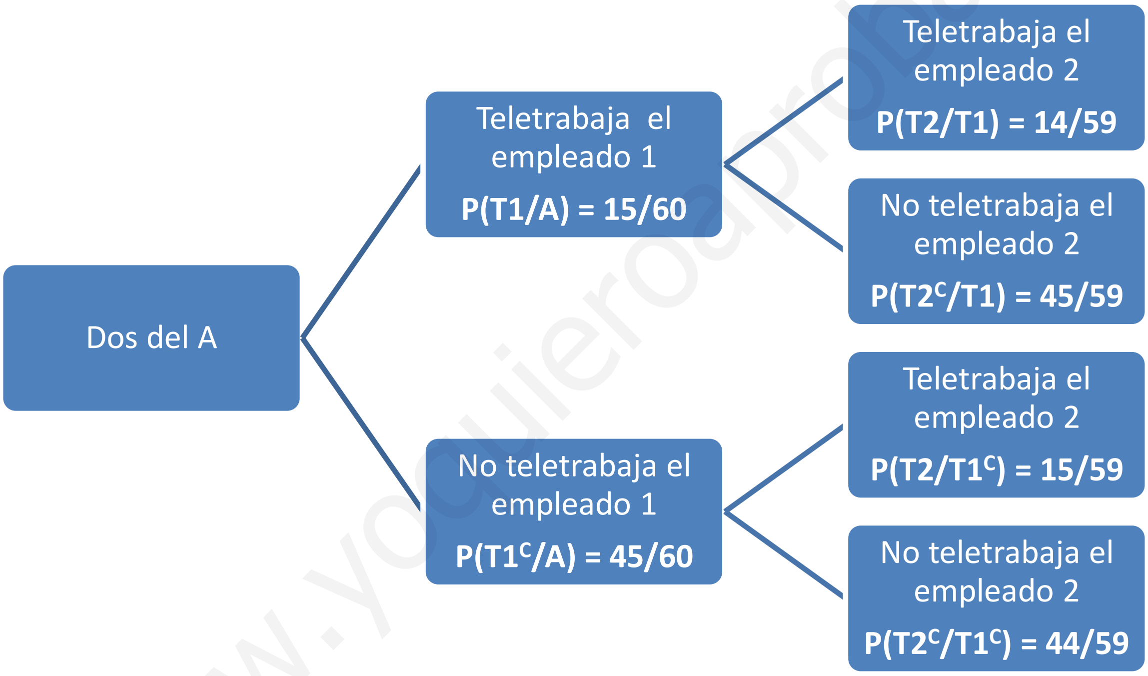
Opción A)
Una empresa tiene dos departamentos (A y B). El departamento A tiene 60 empleados, de los cuales 15 teletrabajan. El departamento B tiene 25 empleados, de los cuales 5 teletrabajan. Se seleccionan al azar dos empleados del departamento A y uno del departamento B. Calcule:

i) La probabilidad de que ninguno de los tres empleados teletrabaje. (2 puntos)
ii) La probabilidad de que únicamente uno de ellos teletrabaje. (4 puntos)
iii) La probabilidad de alguno de ellos teletrabaje. (4 puntos)

(Escriba las fórmulas necesarias)

Llamamos T al suceso "El empleado teletrabaja", A al suceso "Ser empleado del departamento A" y B al suceso "Ser empleado del departamento B"

Hacemos un diagrama de árbol para la elección de los dos empleados del departamento A.



i)

$$P\left(T1^C / A\right) P\left(T2^C / T1^C \cap A\right) P\left(T3^C / B\right) = \frac{45}{60} \cdot \frac{44}{59} \cdot \frac{20}{25} = \frac{132}{295} \simeq 0.447$$

ii) Hay varias formas de que pase esto. Calculamos la probabilidad de cada caso y lo sumamos.

$$P\left(T1 / A\right) P\left(T2^C / T1 \cap A\right) P\left(T3^C / B\right) = \frac{15}{60} \cdot \frac{45}{59} \cdot \frac{20}{25} = \frac{9}{59}$$

$$P\left(T1^C/A\right)P\left(T2/T1^C\cap A\right)P\left(T3^C/B\right)=\frac{45}{60}\cdot\frac{15}{59}\cdot\frac{20}{25}=\frac{9}{59}$$

$$P\left(T1^C/A\right)P\left(T2^C/T1^C\cap A\right)P\left(T3/B\right)=\frac{45}{60}\cdot\frac{44}{59}\cdot\frac{5}{25}=\frac{33}{295}$$

$$P\left(\acute{U}nicamente\,uno\,teletrabaja\right)=\frac{9}{59}+\frac{9}{59}+\frac{33}{295}=\boxed{\frac{123}{295}\simeq 0.417}$$

iii) Lo calculamos usando el suceso contrario a "alguno de ellos teletrabaje" que es "ninguno de ellos teletrabaja".

$$P\left(\text{Alguno de ellos teletrabaja}\right)=1-P\left(\text{Ninguno de ellos teletrabaja}\right)=$$

$$=1-P\left(T1^C/A\right)P\left(T2^C/T1^C\cap A\right)P\left(T3^C/B\right)=1-\frac{45}{60}\cdot\frac{44}{59}\cdot\frac{20}{25}=\boxed{\frac{163}{295}\simeq 0.5525}$$

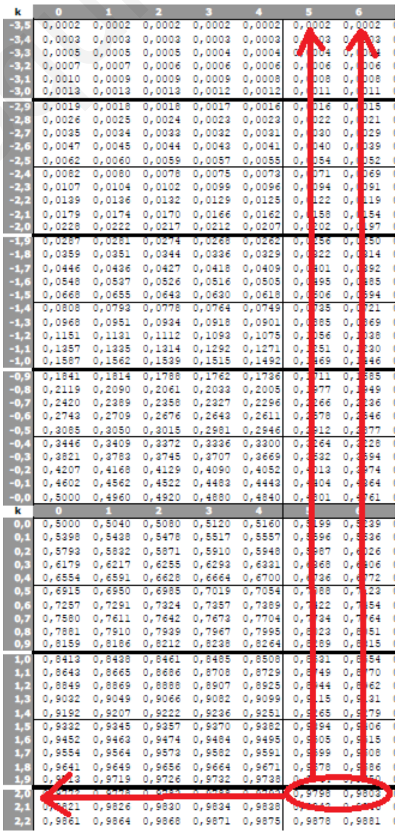
Opción B)
El índice de masa corporal de los estudiantes de una región sigue una distribución normal con varianza 36. A partir de los datos obtenidos de una muestra de 49 estudiantes, se ha calculado un índice de masa corporal medio de 25.
i) Calcule el intervalo de confianza para la media poblacional con un nivel de confianza del 96%. (5 puntos)
ii) Determine cuál debe ser el tamaño de la muestra para que se mantenga el error máximo, con un nivel de confianza del 94 %. (5 puntos)
(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

X = El índice de masa corporal de los estudiantes.
Como la varianza es 36 la desviación típica será $\sigma=\sqrt{36}=6$.
X = N(μ, 6)

i) El tamaño de la muestra es $n = 49$ y la media muestral es $\bar{x}=25$
Averiguamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza el 96 %

$$1-\alpha=0,96 \to \alpha=0,04 \to \frac{\alpha}{2}=0,02 \to 1-\frac{\alpha}{2}=0,98 \to \left\{\begin{array}{l}\text{Busco k en la}\\ \text{tabla de la N(0,1)}\\ P\left(Z<z_{\frac{\alpha}{2}}\right)=0.98\end{array}\right\} \to$$

$$\to z_{\frac{\alpha}{2}}=\frac{2.05+2.06}{2}=2.055$$



k	0	1	2	3	4	5	6
-3,5	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
-3,4	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	[illegible]	[illegible]
-3,3	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	[illegible]	[illegible]
-3,2	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	[illegible]	[illegible]
-3,1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	[illegible]	[illegible]
-3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	[illegible]	[illegible]
-2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	[illegible]	[illegible]
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	[illegible]	[illegible]
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	[illegible]	[illegible]
-2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	[illegible]	[illegible]
-2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	[illegible]	[illegible]
-2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	[illegible]	[illegible]
-2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	[illegible]	[illegible]
-2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	[illegible]	[illegible]
-2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	[illegible]	[illegible]
-2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	[illegible]	[illegible]
-1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	[illegible]	[illegible]
-1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	[illegible]	[illegible]
-1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	[illegible]	[illegible]
-1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	[illegible]	[illegible]
-1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	[illegible]	[illegible]
-1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	[illegible]	[illegible]
-1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	[illegible]	[illegible]
-1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	[illegible]	[illegible]
-1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	[illegible]	[illegible]
-1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	[illegible]	[illegible]
-0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	[illegible]	[illegible]
-0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	[illegible]	[illegible]
-0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	[illegible]	[illegible]
-0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	[illegible]	[illegible]
-0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	[illegible]	[illegible]
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	[illegible]	[illegible]
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	[illegible]	[illegible]
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	[illegible]	[illegible]
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	[illegible]	[illegible]
-0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	[illegible]	[illegible]
k	0	1	2	3	4	[illegible]	[illegible]
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	[illegible]	[illegible]
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	[illegible]	[illegible]
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	[illegible]	[illegible]
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	[illegible]	[illegible]
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	[illegible]	[illegible]
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	[illegible]	[illegible]
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	[illegible]	[illegible]
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	[illegible]	[illegible]
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	[illegible]	[illegible]
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	[illegible]	[illegible]
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	[illegible]	[illegible]
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	[illegible]	[illegible]
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	[illegible]	[illegible]
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	[illegible]	[illegible]
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	[illegible]	[illegible]
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	[illegible]	[illegible]
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	[illegible]	[illegible]
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	[illegible]	[illegible]
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	[illegible]	[illegible]
1,9	[illegible]	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	[illegible]	[illegible]
2,0	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9798	0,9803
2,1	[illegible]	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	[illegible]	[illegible]
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881

Lo aplicamos en la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.055 \cdot \frac{6}{\sqrt{49}} = 1.761$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(25 - 1.761, 25 + 1.761\right) = \left(23.239, \ 26.761\right)$$

ii)

Averiguamos el valor de $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza el 94 %

$$1-\alpha = 0,94 \rightarrow \alpha = 0,06 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,03 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0,97 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Busco k en la} \\ \text{tabla de la N(0,1)} \\ P\left(Z < z_{\frac{\alpha}{2}} \right) = 0.97 \end{array} \right\} \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.88$$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
-3,5	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	[illegible]
-3,4	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	[illegible]
-3,3	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	[illegible]
-3,2	0,0007	0,0007	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	[illegible]
-3,1	0,0010	0,0009	0,0009	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	[illegible]
-3,0	0,0013	0,0013	0,0013	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0011	[illegible]
-2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	[illegible]
-2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	[illegible]
-2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	[illegible]
-2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	[illegible]
-2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	[illegible]
-2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	[illegible]
-2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	[illegible]
-2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	[illegible]
-2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	[illegible]
-2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	[illegible]
-1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	[illegible]
-1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	[illegible]
-1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	[illegible]
-1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	[illegible]
-1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	[illegible]
-1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	[illegible]
-1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	[illegible]
-1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	[illegible]
-1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	[illegible]
-1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	[illegible]
-0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	[illegible]
-0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	[illegible]
-0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	[illegible]
-0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	[illegible]
-0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	[illegible]
-0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	[illegible]
-0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	[illegible]
-0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	[illegible]
-0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	[illegible]
-0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	[illegible]
k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	[illegible]
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	[illegible]
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	[illegible]
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	[illegible]
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	[illegible]
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	[illegible]
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	[illegible]
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	[illegible]
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	[illegible]
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	[illegible]
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	[illegible]
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	[illegible]
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	[illegible]
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	[illegible]
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	[illegible]
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	[illegible]
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	[illegible]
1,7	[illegible]	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	[illegible]
1,8	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	$\boxed{0,9699}$
1,9	[illegible]	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	[illegible]
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812

Mantenemos el error y tendríamos:

$$\left. \begin{array}{l} Error = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ Error = 1.761 \end{array} \right\} \Rightarrow 1.761 = 1.88 \cdot \frac{6}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1.88 \cdot 6}{1.761} \Rightarrow n = \left(\frac{1.88 \cdot 6}{1.761} \right)^2 \simeq 41.03$$

El tamaño mínimo de la muestra es de 42 estudiantes.