UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LAS ENSEÑANZAS
UNIVERSITARIAS OFICIALES DE GRADO
Curso **2022-2023**
MATERIA: MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a **cinco** preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

Cada ejercicio se valorará sobre 2 puntos, y si consta de dos apartados, cada apartado se valorará sobre 1 punto.

TIEMPO: 90 minutos.

A.1. (2 puntos) Se considera la matriz A dada por

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determine A^3 y A^{2023}.

b) Estudie si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

A.2. (2 puntos) Considere la función real de variable real:

$$f(x)=x^3+2x^2$$

a) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f(x)* en el punto de abscisa $x = 1$.

b) Determine los extremos relativos de la función *f(x)* indicando si son máximos o mínimos.

A.3. (2 puntos) Considere la función real de variable real:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+3 & si \quad x<2 \\ e^x & si \quad x\geq 2 \end{cases}$$

a) Obtenga el valor del parámetro real *a* para que la función *f(x)* sea continua en su dominio.

b) Calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de *f(x)*, el eje de abscisas y las rectas $x = 2$ y $x = 3$.

A.4. (2 puntos) Un estudio europeo sobre hábitos alimenticios y actividad física indica que el 27,4%de mujeres españolas mayores de 16 años practica semanalmente alguna actividad física durante al menos 150 minutos, y que el 65,1% consume de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al dia. Además, el 76,3% de estas mujeres dedica semanalmente al menos 150 minutos a practicar alguna actividad física o consume de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al dia. Calcule la probabilidad de que eligiendo una mujer española mayor de 16 años al azar:

a) Dedique semanalmente al menos 150 minutos a practicar alguna actividad física y consuma de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al dia.

b) No dedique semanalmente al menos 150 minutos a practicar alguna actividad física, sabiendo que no consume de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al dia.

A.5. (2 puntos) Para estimar la proporción de empresas que tuvieron pérdidas durante el primer año de la pandemia se tomó una muestra de empresas al azar.

a) Sabiendo que la proporción poblacional es P = 0,55, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra de empresas para garantizar que, con una confianza del 99, 01%, el margen de error en la estimación no supere el 10%.

b) Si la muestra aleatoria fue de 100 empresas, de las cuales 70 tuvieron pérdidas, determine un intervalo de confianza al 95% para la proporción de empresas que tuvieron pérdidas durante el primer año de pandemia.

B.1. (2 puntos) Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} ax + y + 2z = 1 \\ x + ay + 2z = a \\ x + 2y + az = 1 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.
b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 0$.

B.2. (2 puntos) Una entrenadora personal debe diseñar una rutina para un cliente con una duración entre 45 y 60 minutos repartidos entre ejercicios de fuerza y cardiovasculares. El tiempo dedicado a los ejercicios de fuerza no puede superar al de los cardiovasculares, aunque el tiempo dedicado a los ejercicios de fuerza debe ser de al menos 20 minutos. La entrenadora considera que para su cliente el beneficio de un minuto cardiovascular es doble que un minuto de fuerza. ¿Qué duración de cada tipo de ejercicios resulta más beneficiosa para su cliente en la rutina programada? ¿Y la menos beneficiosa?

B.3. (2 puntos) Considere la función real de variable real

$$f(x) = x + \frac{2}{x}$$

a) Halle el dominio de la función y determine sus asíntotas.
b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

B.4. (2 puntos) La Agencia Estatal de Investigación Española convoca regularmente el Programa Ramon y Cajal para la contratación de investigadores de trayectoria destacada en dos modalidades: general y jóvenes doctores. En la convocatoria 2021 se presentaron 2159 solicitudes en la modalidad general y 1316 en la modalidad de jóvenes doctores. El porcentaje de investigadores seleccionados en la modalidad general fue el 16,1%, mientras que en la modalidad de jóvenes doctores fue del 21,1%. Eligiendo un investigador al azar, entre los solicitantes, calcule la probabilidad de que:
a) Sea seleccionado para recibir una de las ayudas Ramon y Cajal.
b) La solicitud sea de la modalidad general, sabiendo que el investigador ha sido seleccionado.

B.5. (2 puntos) La distancia diaria en kilómetros recorrida por un autobús urbano se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica igual a 2 kilómetros.
a) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es de 50 kilómetros diarios. Determine un intervalo de confianza del 99% para la distancia media recorrida diariamente por los autobuses urbanos.
b) Determine el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 1 kilometro, con un nivel de confianza del 90%.

SOLUCIONES

A.1. (2 puntos) Se considera la matriz A dada por

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Determine A^3 y A^{2023}.
b) Estudie si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

a) Calculamos A^3.

$$A^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1/6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1/6 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=Id_3$$

Tenemos que $A^3 = Id_3$.

Calculamos A^{2023}.

$$A^3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=Id_3$$

$$\begin{array}{l|l} 2023 & 3 \\ \hline 22 & 674 \\ \ \ 13 & \\ \ \ \ 1 & \end{array}$$

$$2023=3\cdot 674+1$$

$$A^{2023}=A^{3\cdot 674+1}=A^{3\cdot 674}\cdot A=\left(A^3\right)^{674}\cdot A=\left(Id\right)^{674}\cdot A=Id\cdot A=A$$

Hemos obtenido que $A^{2023}=A$.

b) Comprobamos que el determinante de A es no nulo y por tanto existe la inversa de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \end{vmatrix}=0+0+\frac{6}{6}-0-0-0=1\neq 0$$

La matriz inversa de A existe y la calculamos.

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}0 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1/3\\ 6 & 0 & 0\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}0 & 1/3\\ 0 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 1/3\\ 6 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 0\\ 6 & 0\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1/2 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 0\\ 6 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 1/2\\ 6 & 0\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}1/2 & 0\\ 0 & 1/3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 1/3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & 1/2\\ 0 & 0\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\\ 1/6 & 0 & 0\end{pmatrix}}$$

A.2. (2 puntos) Considere la función real de variable real:

$$f(x)=x^3+2x^2$$

a) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f(x)* en el punto de abscisa *x = 1*.
b) Determine los extremos relativos de la función *f(x)* indicando si son máximos o mínimos.

a) La ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f(x)* en el punto de abscisa *x = 1* es $y-f(1)=f'(1)(x-1)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=1^3+2\cdot 1^2=3 \\ f'(x)=3x^2+4x \to f'(1)=3\cdot 1^2+4=7 \\ y-f(1)=f'(1)(x-1) \end{array}\right\} \Rightarrow y-3=7(x-1) \Rightarrow \boxed{y=7x-4}$$

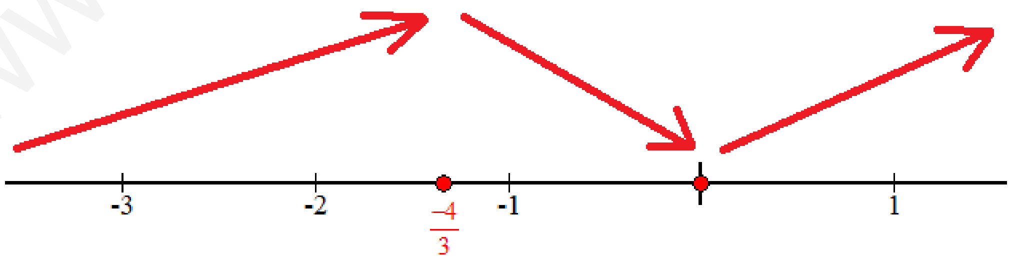
b) Buscamos cuando se anula la derivada.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3x^2+4x \\ f'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x^2+4x=0 \Rightarrow x(3x+4)=0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ 3x+4=0 \to 3x=-4 \to x=\dfrac{-4}{3} \end{array}\right.$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En el intervalo $\left(-\infty,-\frac{4}{3}\right)$ tomamos *x = –2* y la derivada vale $f'(-2)=3(-2)^2+4(-2)=12-8=4>0$. La función crece en $\left(-\infty,-\frac{4}{3}\right)$.
- En el intervalo $\left(-\frac{4}{3},0\right)$ tomamos *x = –1* y la derivada vale $f'(-1)=3(-1)^2+4(-1)=3-4=-1<0$. La función decrece en $\left(-\frac{4}{3},0\right)$.
- En el intervalo $(0,+\infty)$ tomamos *x = 1* y la derivada vale $f'(1)=3\cdot 1^2+4=7>0$. La función crece en $(0,+\infty)$.

La función evoluciona como indica el esquema siguiente.



La función tiene un máximo relativo en $x=\frac{-4}{3}$ y un mínimo relativo en *x = 0*.

$$f\left(\frac{-4}{3}\right)=\left(\frac{-4}{3}\right)^3+2\left(\frac{-4}{3}\right)^2=\frac{32}{27}; \quad f(0)=0^3+2\cdot 0=0.$$

El máximo relativo tiene coordenadas $\left(\frac{-4}{3},\frac{32}{27}\right)$ y el mínimo relativo tiene coordenadas (0, 0).

A.3. (2 puntos) Considere la función real de variable real:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+3 & si \quad x<2 \\ e^x & si \quad x\geq 2 \end{cases}$$

a) Obtenga el valor del parámetro real *a* para que la función *f(x)* sea continua en su dominio.
b) Calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de *f(x)*, el eje de abscisas y las rectas *x = 2* y *x = 3*.

a) La función debe ser continua en $x=2$.

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=e^2 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} ax^2+3=a\cdot 2^2+3=4a+3 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} e^x=e^2 \\ f(2)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow e^2=4a+3 \Rightarrow 4a=e^2-3 \Rightarrow \boxed{a=\frac{e^2-3}{4}}$$

Para que sea continua la función *f(x)* debe ser $a=\dfrac{e^2-3}{4}$.

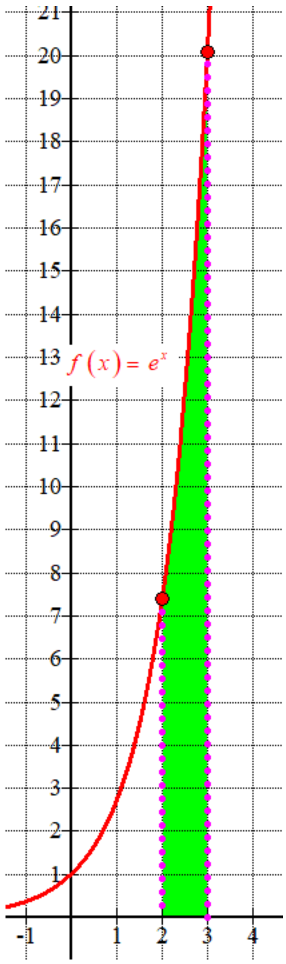
b) Entre *x = 2* y *x = 3* la función es $f(x)=e^x$.

Averiguamos cuando la gráfica de la función *f(x)* corta el eje de abscisas.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=e^x \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow e^x=0 \Rightarrow \text{¡No existe!}$$

El área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de *f(x)*, el eje de abscisas y las rectas *x = 2* y *x = 3* es el valor de la integral definida de la función entre 2 y 3.

$$Área=\int_2^3 f(x)dx=\int_2^3 e^x dx=\left[e^x\right]_2^3=e^3-e^2\simeq 12.696\ u^2$$



A.4. (2 puntos) Un estudio europeo sobre hábitos alimenticios y actividad física indica que el 27,4% de mujeres españolas mayores de 16 años practica semanalmente alguna actividad física durante al menos 150 minutos, y que el 65,1% consume de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al dia. Además, el 76,3% de estas mujeres dedica semanalmente al menos 150 minutos a practicar alguna actividad física o consume de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al dia. Calcule la probabilidad de que eligiendo una mujer española mayor de 16 años al azar:
a) Dedique semanalmente al menos 150 minutos a practicar alguna actividad física y consuma de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al dia.
b) No dedique semanalmente al menos 150 minutos a practicar alguna actividad física, sabiendo que no consume de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al dia.

Llamamos A al suceso "Mujer española mayor de 16 años practica semanalmente alguna actividad física durante al menos 150 minutos" y B al suceso "Mujer española que consume de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al dia".

a) Sabemos que *P(A) = 0.274* y que *P(B) = 0.651*.
El 76,3% de las mujeres españolas consume fruta o hace actividad física → $P(A\cup B)=0.763$
Nos piden calcular $P(A\cap B)$.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow 0.763=0.274+0.651-P(A\cap B)\Rightarrow$$

$$P(A\cap B)=0.274+0.651-0.763=\boxed{0.162}$$

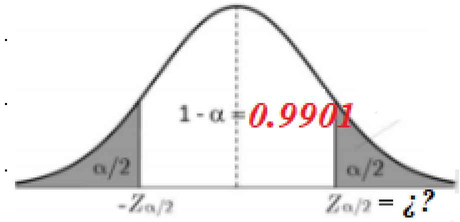
b) Nos piden calcular $P(\overline{A}/\overline{B})$. Aplicamos el teorema de Bayes y las leyes de Morgan.

$$P(\overline{A}/\overline{B})=\frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(\overline{A\cup B})}{1-P(B)}=\frac{1-P(A\cup B)}{1-P(B)}=\frac{1-0.763}{1-0.651}=\boxed{\frac{237}{349}\simeq 0.6791}$$

A.5. (2 puntos) Para estimar la proporción de empresas que tuvieron pérdidas durante el primer año de la pandemia se tomó una muestra de empresas al azar.
a) Sabiendo que la proporción poblacional es P = 0,55, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra de empresas para garantizar que, con una confianza del 99, 01%, el margen de error en la estimación no supere el 10%.
b) Si la muestra aleatoria fue de 100 empresas, de las cuales 70 tuvieron pérdidas, determine un intervalo de confianza al 95% para la proporción de empresas que tuvieron pérdidas durante el primer año de pandemia.

a) Para un nivel de confianza del 99.01 % hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$

$$1-\alpha = 0{,}9901 \rightarrow \alpha = 0{,}0099 \rightarrow \alpha/2 = 0{,}00495 \rightarrow 1-\alpha/2 = 0{,}99505 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.575$$



Utilizamos la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \Rightarrow 0.1 = 2.575\sqrt{\frac{0.55\cdot 0.45}{n}} \Rightarrow \frac{0.1}{2.575} = \sqrt{\frac{0.55\cdot 0.45}{n}} \Rightarrow$$

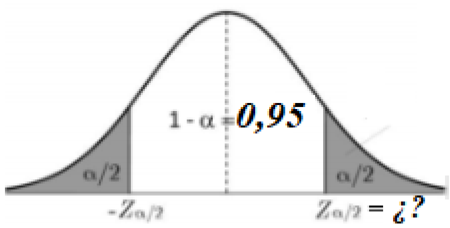
$$\Rightarrow \left(\frac{0.1}{2.575}\right)^2 = \frac{0.55\cdot 0.45}{n} \Rightarrow n\left(\frac{0.1}{2.575}\right)^2 = 0.55\cdot 0.45 \Rightarrow n = \frac{0.55\cdot 0.45}{\left(\frac{0.1}{2.575}\right)^2} \simeq 164.1$$

Para que el error no supere el 10 % el tamaño mínimo de la muestra debe ser 165 empresas.

b) La proporción de empresas con pérdidas es $p = \frac{70}{100} = 0.7$

Para un nivel de confianza del 95 % hallamos el valor de $z_{\alpha/2}$

$$1-\alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow \alpha/2 = 0{,}025 \rightarrow 1-\alpha/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$



Utilizamos la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 1.96\sqrt{\frac{0.7\cdot 0.3}{100}} \simeq 0.0898$$

El intervalo de confianza es:

$$(p - Error, p + Error) = (0.7 - 0.0898, 0.7 + 0.0898) = (0.6102, 0.7898)$$

B.1. (2 puntos) Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real *a*:

$$\begin{cases} ax+y+2z=1 \\ x+ay+2z=a \\ x+2y+az=1 \end{cases}$$

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro *a*.
b) Resuelva el sistema de ecuaciones para *a = 0*.

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$

Y la matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 2 & a \\ 1 & 2 & a & 1 \end{pmatrix}$

Calculamos el determinante de A y averiguamos cuando se anula.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix}=a^3+2+4-2a-a-4a=a^3-7a+6$$

$$|A|=0\Rightarrow a^3-7a+6=0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -7 & 6 \\ 1 & & 1 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & \lfloor 0 \end{array} \Rightarrow \boxed{a=1} \text{ es raíz}$$

$$a^2+a-6=0\Rightarrow a=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(1)(-6)}}{2}=\frac{-1\pm 5}{2}=\begin{cases} \frac{-1+5}{2}=\boxed{2=a} \\ \frac{-1-5}{2}=\boxed{-3=a} \end{cases}$$

El determinante de A se anula para *a = 1*, *a = 2* y *a = –3*.
Distinguimos 4 casos distintos que analizamos por separado.

CASO 1. $a\neq 1;\ a\neq 2 \quad y \quad a\neq -3$

En este caso el determinante de A no se anula y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (solución única).

CASO 2. $a=1$

La matriz A/B queda $A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ utilizamos el método de Gauss y obtenemos la matriz triangular equivalente.

$$A/B=\begin{pmatrix}1&1&2&1\\1&1&2&1\\1&2&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Fila }2^{a}-\text{Fila }1^{a}\\ \begin{array}{cccc}1&1&2&1\\-1&-1&-2&-1\\\hline 0&0&0&0\end{array}\rightarrow\text{Nueva fila }2^{a}\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Fila }3^{a}-\text{Fila }1^{a}\\ \begin{array}{cccc}1&2&1&1\\-1&-1&-2&-1\\\hline 0&1&-1&0\end{array}\rightarrow\text{Nueva fila }3^{a}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}1&1&2&1\\0&0&0&0\\0&1&-1&0\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\text{Fila }3^{a}\leftrightarrow\text{Fila }2^{a}\right\}\Rightarrow\left(\overbrace{\begin{matrix}1&1&2&1\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{matrix}}^{A/B}\right)$$

El rango de A es 2, al igual que el de A/B, pero es menor que el número de incógnitas (3). El sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

CASO 3. $a=2$

La matriz A/B queda $A/B=\begin{pmatrix}2&1&2&1\\1&2&2&2\\1&2&2&1\end{pmatrix}$ utilizamos el método de Gauss y obtenemos la matriz triangular equivalente.

$$A/B=\begin{pmatrix}2&1&2&1\\1&2&2&2\\1&2&2&1\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Fila }3^{a}-\text{Fila }2^{a}\\ \begin{array}{cccc}1&2&2&1\\-1&-2&-2&-2\\\hline 0&0&0&-1\end{array}\rightarrow\text{Nueva Fila }3^{a}\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Fila }1^{a}-2\cdot\text{Fila }2^{a}\\ \begin{array}{cccc}2&1&2&1\\-2&-4&-4&-4\\\hline 0&-3&-2&-3\end{array}\rightarrow\text{Nueva Fila }2^{a}\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\overbrace{\begin{matrix}2&1&2&1\\0&-3&-2&-3\\0&0&0&-1\end{matrix}}^{A/B}\right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Al tener rangos distintos el sistema es **incompatible** (sin solución)

CASO 4. $a=-3$

La matriz A/B queda $A/B=\begin{pmatrix}-3&1&2&1\\1&-3&2&-3\\1&2&-3&1\end{pmatrix}$ utilizamos el método de Gauss y obtenemos la matriz triangular equivalente.

$$A/B=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 2 & 1\\ 1 & -3 & 2 & -3\\ 1 & 2 & -3 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Fila }3^a\ -\ \text{Fila }2^a\\ \begin{array}{cccc}1 & 2 & -3 & 1\\ -1 & 3 & -2 & 3\\ \hline 0 & 5 & -5 & 4\end{array}\ \to \text{Nueva Fila }3^a\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Fila }1^a+3\cdot\text{Fila }1^a\\ \begin{array}{cccc}-3 & 1 & 2 & 1\\ 3 & -9 & 6 & -9\\ \hline 0 & -8 & 8 & -8\end{array}\ \to \text{Nueva Fila }2^a\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}-3 & 1 & 2 & 1\\ 0 & -8 & 8 & -8\\ 0 & 5 & -5 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}5\cdot\text{Fila }2^a+8\cdot\text{Fila }3^a\\ \begin{array}{cccc}0 & -40 & 40 & -40\\ 0 & 40 & -40 & 32\\ \hline 0 & 0 & 0 & -8\end{array}\ \to \text{Nueva Fila }3^a\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\overbrace{\begin{array}{cccc}-3 & 1 & 2 & 1\\ 0 & -8 & 8 & -8\\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 0}_{A} & & & -8\end{array}}^{A/B}\right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Al tener rangos distintos el sistema es **incompatible** (sin solución)

Resumiendo: Si $a\neq 1;\ a\neq 2\ \ y\ \ a\neq -3$ el sistema es compatible determinado (única solución), si $a=2$ o $a=-3$ el sistema es incompatible (sin solución) y si $a=1$ el sistema **es** compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Para *a = 0* la situación es la analizada en el caso 1 y el sistema es compatible determinado.

El sistema queda $\begin{cases}y+2z=1\\ x+2z=0\\ x+2y=1\end{cases}$. Lo resolvemos

$$\begin{cases}y+2z=1\\ x+2z=0\\ x+2y=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=1-2z\\ x=-2z\\ x+2y=1\end{cases}\Rightarrow -2z+2(1-2z)=1\Rightarrow -2z+2-4z=1\Rightarrow -6z=-1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{z=\frac{1}{6}}\Rightarrow\begin{cases}\boxed{y=1-2\frac{1}{6}=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}}\\ \boxed{x=-2\frac{1}{6}=\frac{-1}{3}}\end{cases}$$

La solución del sistema es: $x=\frac{-1}{3};\ y=\frac{2}{3};\ z=\frac{1}{6}$.

.

B.2. (2 puntos) Una entrenadora personal debe diseñar una rutina para un cliente con una duración entre 45 y 60 minutos repartidos entre ejercicios de fuerza y cardiovasculares. El tiempo dedicado a los ejercicios de fuerza no puede superar al de los cardiovasculares, aunque el tiempo dedicado a los ejercicios de fuerza debe ser de al menos 20 minutos. La entrenadora considera que para su cliente el beneficio de un minuto cardiovascular es doble que un minuto de fuerza. ¿Qué duración de cada tipo de ejercicios resulta más beneficiosa para su cliente en la rutina programada? ¿Y la menos beneficiosa?

Llamemos x = "minutos de ejercicios de fuerza", y = "minutos de ejercicios cardiovasculares".

Deseamos maximizar el beneficio que viene expresado como $B(x,y)=x+2y$.

Las restricciones del problema son:

"Las cantidades deben ser positivas" → $x\geq 0; \quad y\geq 0$

"Una rutina con una duración entre 45 y 60 minutos repartidos entre ejercicios de fuerza y cardiovasculares" → $45\leq x+y\leq 60$

"El tiempo dedicado a los ejercicios de fuerza no puede superar al de los cardiovasculares" → $x\leq y$

"El tiempo dedicado a los ejercicios de fuerza debe ser de al menos 20 minutos" → $x\geq 20$

Reuniendo todas las restricciones tenemos el sistema de inecuaciones siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} 45\leq x+y\leq 60 \\ x\leq y \\ x\geq 20 \\ x\geq 0; \quad y\geq 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x+y=45$

x	$y=45-x$
0	45
45	0

$x+y=60$

x	$y=60-x$
0	60
60	0

$y=x$

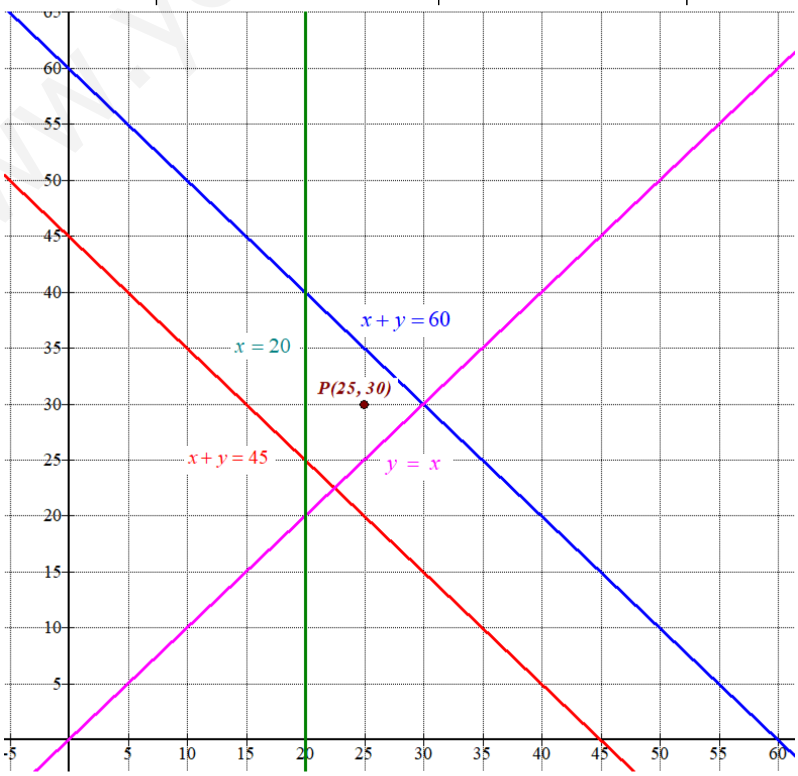
x	$y=x$
0	0
50	50

$x=20$

$x=20$	y
20	0
20	20

$x\geq 0; \quad y\geq 0$

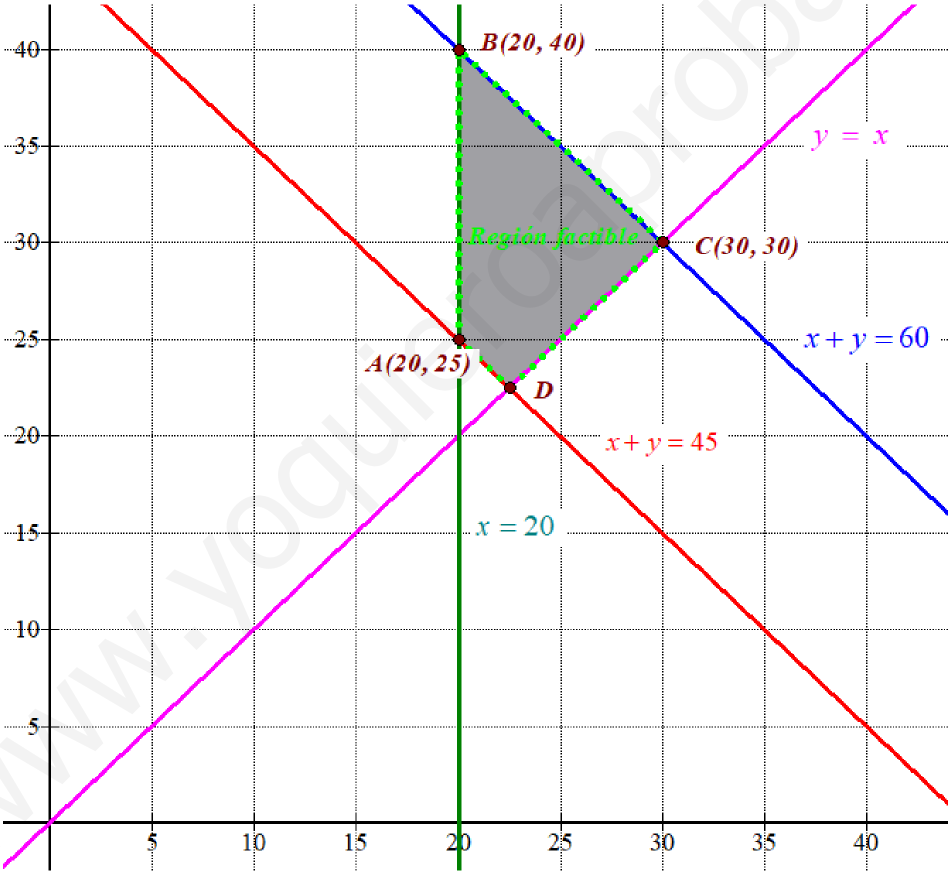
Primer cuadrante



Como las restricciones son $\left.\begin{array}{r} 45 \leq x+y \leq 60 \\ x \leq y \\ x \geq 20 \\ x \geq 0; \quad y \geq 0 \end{array}\right\}$ la región está en el primer cuadrante por encima de la recta rosa y roja, por debajo de la recta azul y a la derecha de la recta vertical verde $x = 20$.
Lo comprobamos probando si el punto P(25, 30) perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{r} 45 \leq 25+30 \leq 60 \\ 25 \leq 30 \\ 25 \geq 20 \\ 25 \geq 0; \quad 30 \geq 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible.



Nos falta por determinar las coordenadas del punto D. Resolvemos el sistema de ecuaciones correspondiente.

$$D \rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=45 \\ y=x \end{array}\right\} \Rightarrow x+x=45 \Rightarrow 2x=45 \Rightarrow x=\frac{45}{2}=22.5 \Rightarrow y=22.5 \Rightarrow \boxed{D(22.5, 22.5)}$$

Valoramos la función beneficio $B(x,y)=x+2y$ en cada vértice en busca de los valores máximo y mínimo.

A(20, 25) → $B(20,25)=20+2\cdot 25=70$

B(20, 40) → $B(20,40)=20+2\cdot 40=100$ ¡*Máximo*!

C(30, 30) → $B(30,30) = 30 + 2 \cdot 30 = 90$

D(22.5, 22.5) → $B(22.5, 22.5) = 22.5 + 2 \cdot 22.5 = 67.5$ ¡*Mínimo*!

La rutina más beneficiosa consta de 20 minutos de ejercicio de fuerza y 40 de ejercicios cardiovasculares. La menos beneficiosa es la que consta de 22 minutos y medio de cada tipo de ejercicios.

B.3. (2 puntos) Considere la función real de variable real

$$f(x)=x+\frac{2}{x}$$

a) Halle el dominio de la función y determine sus asíntotas.
b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador de la fracción. Dominio = $\mathbb{R}-\{0\}$

Asíntotas verticales. $x=a$

¿$x=0$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} x+\frac{2}{x}=0+\frac{2}{0}=\infty$$

$x=0$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} x+\frac{2}{x}=\infty+\frac{1}{\infty}=\infty$$

No tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\frac{2}{x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x}+\frac{2}{x^2}=\lim_{x\to\infty}1+\frac{2}{x^2}=1+\frac{2}{\infty}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}x+\frac{2}{x}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}=\frac{2}{\infty}=0$$

$y=x$ es asíntota oblicua.

b) Usamos la función derivada para buscar sus puntos críticos.

$$f(x)=x+\frac{2}{x}\Rightarrow f'(x)=1-\frac{2}{x^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=1-\dfrac{2}{x^2} \\ f'(x)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow 1-\frac{2}{x^2}=0\Rightarrow 1=\frac{2}{x^2}\Rightarrow x^2=2\Rightarrow x=\pm\sqrt{2}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores. Añadimos el valor excluido del dominio.

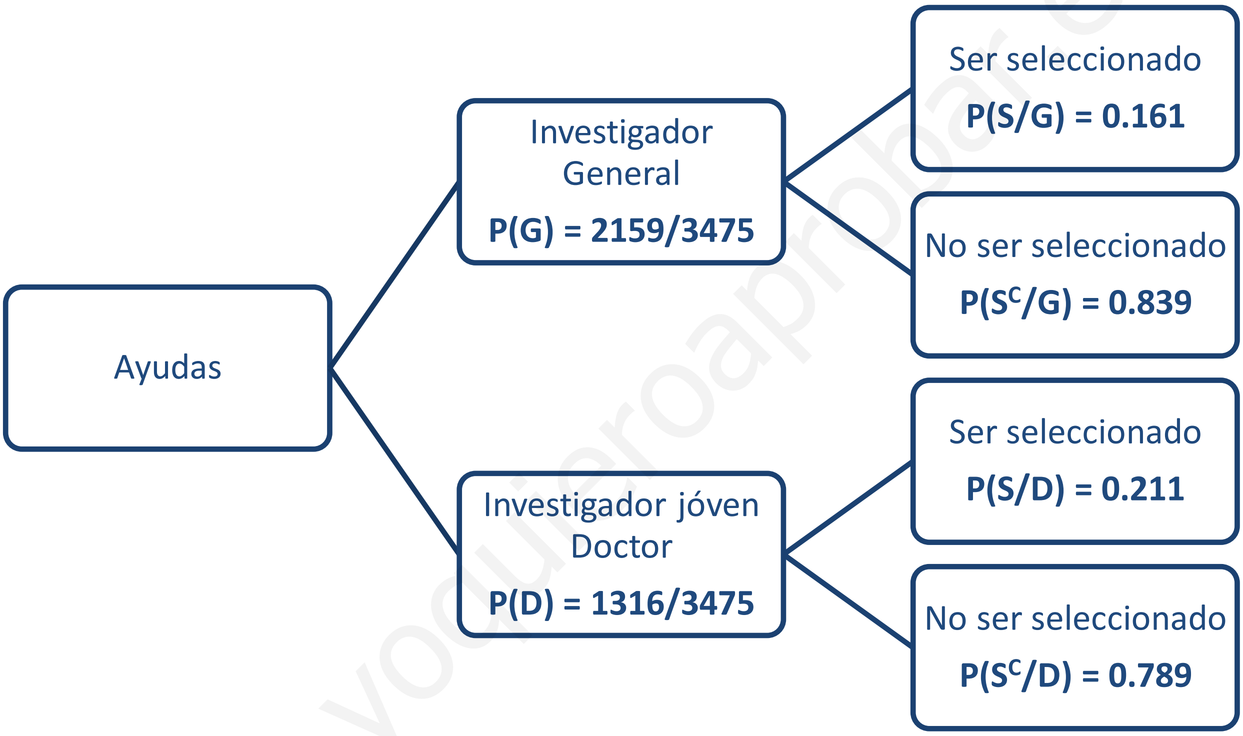
- En el intervalo $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)$ tomamos $x=-2$ y la derivada vale $f'(-2)=1-\frac{2}{(-2)^2}=1-\frac{2}{4}=\frac{1}{2}>0$. La función crece en $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)$.

- En el intervalo $\left(-\sqrt{2},0\right)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1)=1-\frac{2}{(-1)^2}=-1<0$. La función decrece en $\left(-\sqrt{2},0\right)$.
- En el intervalo $\left(0,+\sqrt{2}\right)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1)=1-\frac{2}{1^2}=-1<0$. La función decrece en $\left(0,+\sqrt{2}\right)$.
- En el intervalo $\left(\sqrt{2},+\infty\right)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2)=1-\frac{2}{2^2}=\frac{1}{2}>0$. La función crece en $\left(\sqrt{2},+\infty\right)$.

Resumiendo: La función decrece en $\left(-\sqrt{2},0\right)\cup\left(0,+\sqrt{2}\right)$ y crece en $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2},+\infty\right)$.

B.4. (2 puntos) La Agencia Estatal de Investigación Española convoca regularmente el Programa Ramon y Cajal para la contratación de investigadores de trayectoria destacada en dos modalidades: general y jóvenes doctores. En la convocatoria 2021 se presentaron 2159 solicitudes en la modalidad general y 1316 en la modalidad de jóvenes doctores. El porcentaje de investigadores seleccionados en la modalidad general fue el 16,1%, mientras que en la modalidad de jóvenes doctores fue del 21,1%. Eligiendo un investigador al azar, entre los solicitantes, calcule la probabilidad de que:
a) Sea seleccionado para recibir una de las ayudas Ramon y Cajal.
b) La solicitud sea de la modalidad general, sabiendo que el investigador ha sido seleccionado.

Llamamos G al suceso "Ser investigador General", D al suceso "Ser investigador joven doctor" y S al suceso "Ser seleccionado".
Se presentaron 2159 + 1316 = 3475 solicitudes.
Realizamos un diagrama de árbol descriptivo de la situación.



a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(S)=P(G)P(S/G)+P(D)P(S/D)=\frac{2159}{3475}\cdot 0.161+\frac{1316}{3475}\cdot 0.211\simeq \boxed{0.18}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

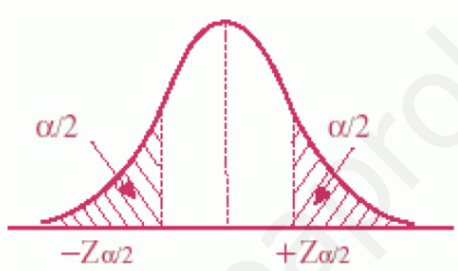
$$P(G/S)=\frac{P(G\cap S)}{P(S)}=\frac{P(G)P(S/G)}{P(S)}=\frac{\frac{2159}{3475}\cdot 0.161}{0.18}\simeq \boxed{0.556}$$

B.5. (2 puntos) La distancia diaria en kilómetros recorrida por un autobús urbano se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica igual a 2 kilómetros.
a) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es de 50 kilómetros diarios. Determine un intervalo de confianza del 99% para la distancia media recorrida diariamente por los autobuses urbanos.
b) Determine el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 1 kilometro, con un nivel de confianza del 90%.

a) X = Distancia diaria en kilómetros recorrida por un autobús urbano.
X = N(μ, 2)
El tamaño de la muestra es $n = 20$ y la media muestral es $\bar{x} = 50$.

Calculamos $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 99 %.

$$1-\alpha = 0.99 \Rightarrow \alpha = 0.01 \Rightarrow \alpha/2 = 0.005 \Rightarrow 1-\alpha/2 = 0.995 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2.575$$



Calculamos el error del intervalo de confianza.

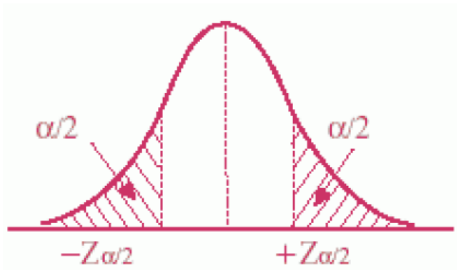
$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{2}{\sqrt{20}} = 1.15$$

El intervalo de confianza es

$$\left(\bar{x} - Error,\ \bar{x} + Error\right) = (50 - 1.15,\ 50 + 1.15) = (48.85,\ 51.15)$$

b) Calculamos $z_{\alpha/2}$ para un nivel de confianza del 90 %

$$1-\alpha = 0.90 \Rightarrow \alpha = 0.10 \Rightarrow \alpha/2 = 0.05 \Rightarrow 1-\alpha/2 = 0.95 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.645$$



Igualamos el error a 1.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1 = 1.645 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = 1.645 \cdot 2 \Rightarrow \boxed{n = (1.645 \cdot 2)^2 = 10.8241}$$

El tamaño mínimo debe ser un número entero superior al obtenido.
El tamaño mínimo de la muestra es de 11 autobuses.