CIUG	PAU (MAIORES DE 25 ANOS) 2023	Código: 42

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

PROBLEMAS: Hasta 2 puntos cada problema.

1. Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix} \quad X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix}.$$

a) Calcule las matrices $M=A\cdot B$ y $N=B\cdot A$

b) Calcule la inversa de la matriz P siendo $P=(N-I)$, donde I representa a matriz identidad

c) Resuelva el sistema $P\cdot X=C$

2. Dada la función $f(x)=x^3+rx^2-sx+t$, donde r, s, t son números reales, determine los valores de r, s, t para que *f(x)* tenga un máximo en $x=-2$, un mínimo en $x=0$ y pase por el punto $(1,-1)$

3. El 35 % de los estudiantes de un centro practica baloncesto. De los que practican baloncesto, el 70% practica además tenis. De los que no practican baloncesto, un cuarto practica tenis. Elegido al azar un estudiante de ese centro:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que practique ambos deportes?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que practique tenis?

c) ¿Son independientes los sucesos "practicar baloncesto" y "practicar tenis"?

CUESTIONES: Se valora con 1 punto la respuesta correcta, 0 puntos si no se contesta y -0,5 si la respuesta es incorrecta.

1. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & m\\ 1 & m & 2\end{pmatrix}$ los valores de m para los que A tiene inversa son

a) $m=-2$

b) $m\neq -2$ e $m\neq 1$

c) cualquier valor de m

2. El $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-2}{x^3+x^2+1}$ vale

a) 4

b) -2

c) 2

3. Si A y B son sucesos tales que $P(A)=0,4,\ P(B)=0,5$ y $P(A\cap B)=0,15$

a) A y B son incompatibles

b) A y B son independientes

c) $P(A\cup B)=0,75$

4. La derivada de la función $f(x)=(lnx)/x$ es igual a

a) $(1-lnx)/x^2$

b) $1/x^2$

c) Ninguna de las anteriores

SOLUCIONES

PROBLEMAS: Hasta 2 puntos cada problema.

1. Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix} \quad X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix}.$$

a) Calcule las matrices $M=A\cdot B$ y $N=B\cdot A$

b) Calcule la inversa de la matriz P siendo $P=(N-I)$, donde I representa a matriz identidad

c) Resuelva el sistema $P\cdot X=C$

a)

$$M=A\cdot B=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6-2-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\end{pmatrix}$$

$$1\times\boxed{3\qquad\cdot 3}\times 1\rightarrow 1\times 1$$

$$N=B\cdot A=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 3 & -3\\-4 & -2 & 2\\2 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

$$3\times\boxed{1\cdot 1}\times 3\longrightarrow 3\times 3$$

b) Calculamos la expresión de P.

$$P=(N-I)=\begin{pmatrix}6 & 3 & -3\\-4 & -2 & 2\\2 & 1 & -1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 3 & -3\\-4 & -3 & 2\\2 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

Comprobamos si tiene inversa.

$$|P|=\begin{vmatrix}5 & 3 & -3\\-4 & -3 & 2\\2 & 1 & -2\end{vmatrix}=30+12+12-18-24-10=54-52=2\neq 0$$

Calculamos la inversa.

$$P^{-1}=\frac{Adj\left(P^T\right)}{|P|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}5 & -4 & 2\\3 & -3 & 1\\-3 & 2 & -2\end{pmatrix}}{2}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}-3 & 1\\2 & -2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}3 & 1\\-3 & -2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}3 & -3\\-3 & 2\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}-4 & 2\\2 & -2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}5 & 2\\-3 & -2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}5 & -4\\-3 & 2\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}-4 & 2\\-3 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}5 & 2\\3 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}5 & -4\\3 & -3\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4 & 3 & -3\\-4 & -4 & 2\\2 & 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3/2 & -3/2\\-2 & -2 & 1\\1 & 1/2 & -3/2\end{pmatrix}}$$

c) Despejamos X en la ecuación $P \cdot X = C$.

$$P \cdot X = C \Rightarrow X = P^{-1}C$$

Hallamos la expresión de X.

$$X = P^{-1}C = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ -4 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 16-6 \\ -16+8 \\ 8-2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 10 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}}$$

$$3\times\boxed{3 \qquad \cdot 3}\times 1 \longrightarrow 3\times 1$$

2. Dada la función $f(x)=x^3+rx^2-sx+t$, donde r, s, t son números reales, determine los valores de r, s, t para que *f(x)* tenga un máximo en $x=-2$, un mínimo en $x=0$ y pase por el punto $(1,-1)$

Si *f(x)* tiene un máximo en $x=-2$ se debe cumplir que $f'(-2)=0$.

$$f(x)=x^3+rx^2-sx+t \Rightarrow f'(x)=3x^2+2rx-s$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3x^2+2rx-s \\ f'(-2)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3(-2)^2+2r(-2)-s=0 \Rightarrow 12-4r-s=0$$

Si *f(x)* tiene un mínimo en $x=0$ se debe cumplir que $f'(0)=0$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3x^2+2rx-s \\ f'(0)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3(0)^2+2r(0)-s=0 \Rightarrow -s=0 \Rightarrow \boxed{s=0}$$

Sustituimos el valor de *s* obtenido en la primera ecuación.

$$\left.\begin{array}{l} 12-4r-s=0 \\ s=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 12-4r=0 \Rightarrow -4r=-12 \Rightarrow \boxed{r=\frac{12}{4}=3}$$

La función queda con la expresión $f(x)=x^3+3x^2+t$

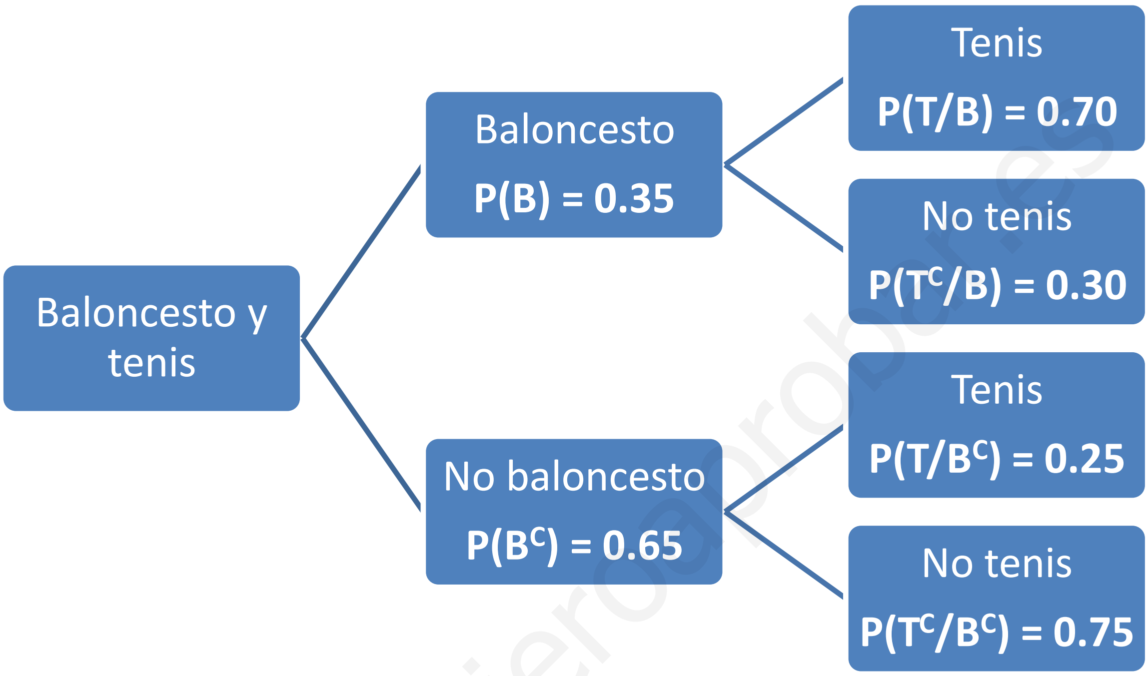
Si *f(x)* pasa por el punto $(1,-1)$ debe cumplirse que $f(1)=-1$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3+3x^2+t \\ f(1)=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow -1=1^3+3\cdot 1^2+t \Rightarrow -1=4+t \Rightarrow \boxed{t=-5}$$

Los valores buscados son $r=3$, $s=0$ y $t=-5$.

3. El 35 % de los estudiantes de un centro practica baloncesto. De los que practican baloncesto, el 70% practica además tenis. De los que no practican baloncesto, un cuarto practica tenis. Elegido al azar un estudiante de ese centro:
a) ¿Cuál es la probabilidad de que practique ambos deportes?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que practique tenis?
c) ¿Son independientes los sucesos "practicar baloncesto" y "practicar tenis"?

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Nos piden calcular $P(B\cap T)$.

$$P(B\cap T)=P(B)P(T/B)=0.35\cdot 0.70=\boxed{0.245}$$

b) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(T)=P(B\cap T)+P(B^C\cap T)=P(B)P(T/B)+P(B^C)P(T/B^C)=$$

$$=0.35\cdot 0.70+0.65\cdot 0.25=\boxed{0.4075}$$

c) Para que sean independientes debe cumplirse $P(B\cap T)=P(B)\cdot P(T)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(B\cap T)=0.245 \\ P(B)\cdot P(T)=0.35\cdot 0.4075=0.142625 \end{array}\right\}\Rightarrow P(B\cap T)=0.245\neq 0.142625=P(B)\cdot P(T)$$

Los sucesos no son independientes.

CUESTIONES: Se valora con 1 punto la respuesta correcta, 0 puntos si no se contesta y -0,5 si la respuesta es incorrecta.

1. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & m\\ 1 & m & 2\end{pmatrix}$ los valores de m para los que A tiene inversa son

a) $m=-2$
b) $m\neq -2$ e $m\neq 1$
c) cualquier valor de m

Para que tenga inversa debe tener determinante no nulo.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & m\\ 1 & m & 2\end{vmatrix}=2-m+0-0-0-m^2=-m^2-m+2$$

$$|A|=0\Rightarrow -m^2-m+2=0\Rightarrow m=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(-1)(2)}}{-2}=\frac{1\pm 3}{-2}=\begin{cases}\frac{1+3}{-2}=-2=m\\ \frac{1-3}{-2}=1=m\end{cases}$$

La matriz A tiene inversa si $m\neq 1$ y $m\neq -2$. La respuesta correcta es b)

2. El $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-2}{x^3+x^2+1}$ vale
a) 4
b) -2
c) 2

$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-2}{x^3+x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3}{x^3}=4$. La respuesta correcta es la a)

3. Si A y B son sucesos tales que $P(A)=0,4,\ P(B)=0,5$ y $P(A\cap B)=0,15$
a) A y B son incompatibles
b) A y B son independientes
c) $P(A\cup B)=0,75$

Como $P(A\cap B)=0,15\neq 0$ los sucesos no son incompatibles. La respuesta a) es incorrecta.

Como $\left.\begin{array}{l}P(A)\cdot P(B)=0,4\cdot 0,5=0,2\\ P(A\cap B)=0,15\end{array}\right\}\Rightarrow P(A)\cdot P(B)\neq P(A\cap B)$ los sucesos tampoco son independientes. La respuesta b) es incorrecta.

Como $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.4+0.5-0.15=0,75$. La respuesta c) es la correcta.

4. La derivada de la función $f(x) = (lnx)/x$ es igual a

a) $(1-lnx)/x^2$

b) $1/x^2$

c) Ninguna de las anteriores

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

La respuesta correcta es la a).