PRUEBA DE ACCESO PARA MAYORES DE 25 (2023)
Adaptación del modelo de examen a causa de COVID-19
Materia: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales
Esta prueba consta de dos propuestas (A y B) con seis problemas cada una. Se ha de elegir una propuesta y resolver un máximo de 4 problemas de la propuesta elegida. Se puede utilizar cualquier tipo de calculadora.

Propuesta A

1. El número de personas que han ido a vacunarse durante ocho semanas consecutivas viene dado por la función $C(x)=x^3-9x^2+15x+50$; siendo *C(x)* el número de personas (en miles) y *x* la semana ($1\le x\le 8$).
a) ¿Cuándo acude más gente? ¿En qué semana van menos personas? (1 punto)
b) ¿Cuántas personas hay en las semanas de máxima y mínima asistencia? (0.5 puntos)
c) ¿En qué intervalo de tiempo decrece la cantidad de personas que acuden a vacunarse? (1 punto)

2. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 5 & 1\end{pmatrix}$

a) Calcula la matriz $M=A\cdot B+2I$ donde *I* es la matriz identidad de orden 3. (1.25 puntos)
b) Calcula, si es posible, la matriz *X* tal que $X\cdot C=I$ donde *I* es la matriz identidad de orden 2. (1.25 puntos)

3. En la función $f(x)=x^4-8x^2+9$, se pide:
a) Calcular los extremos relativos (máximos y mínimos) de la función. (1.5 puntos)
b) Averiguar los puntos de inflexión. (0.5 puntos)
c) Estudiar la curvatura (intervalos de concavidad y convexidad). (0.5 puntos)

4. En un instituto se ha organizado un concurso literario y han sido seleccionados tres relatos. Hay un jurado para elegir el relato ganador, que está formado por 30 personas, cada miembro del jurado tiene que votar uno de los tres relatos y todos los votos han sido válidos. El relato A ha obtenido el doble número de votos que el relato B, y si uno de los votantes del relato C hubiese dado su voto al relato B, éstos hubieran empatado.
a) Plantea un sistema de ecuaciones que responda a las condiciones del enunciado. (1 punto)
b) Resuelve razonadamente el sistema planteado para determinar cuántos votos ha obtenido cada relato. (1.5 puntos)

5. En una clase formada por 32 alumnos, 20 han aprobado Matemáticas, 17 han aprobado Física y 8 han suspendido las dos asignaturas.
a) ¿Cuál es la probabilidad de suspender alguna de las dos asignaturas? (1.25 puntos)
b) ¿Cuál es la probabilidad de aprobar las dos asignaturas? (1.25 puntos)

6. Un fabricante de bombillas ha tomado una muestra aleatoria de 49 bombillas y ha medido el tiempo en horas que tardan en fundirse, proporcionando una media de 364 horas. Si se sabe que el tiempo que tardan en fundirse sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2=515.29\,horas^2$, se pide:
a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo que tardan en fundirse con un nivel de confianza del 97%: (1 punto)
b) Explica, justificando la respuesta, qué se podría hacer para conseguir un intervalo de confianza con mayor amplitud para el mismo nivel de confianza. (0.75 puntos)

c) El fabricante afirma que el tiempo que tardan en fundirse es de 370 horas. ¿Se puede aceptar la afirmación del fabricante con un nivel de confianza del 99 %? Justificar la respuesta. (0.75 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Propuesta B

1. El consumo de energía, en kWh, de un determinado hogar a lo largo de un año viene reflejado por la función $C(x)=x^3-15x^2+48x+100$, siendo *x* los meses del año de enero a diciembre ($1\leq x\leq 12$):
a) ¿En qué mes se produjo el mayor consumo de energía y cuántos kWh se consumieron? (1.25 puntos)
b) ¿En qué intervalos de tiempo crece el consumo de energía? (1.25 puntos)

2. Dadas las matrices $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -1 & 0\\ 2 & -3\end{pmatrix}$ $D=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ (*I* la matriz identidad de orden 2):

a) Calcula $C\cdot B^2\cdot 2I$. (1 punto)
b) Calcula, si es posible, la matriz *X* tal que $BX-I=D^T$. (1.5 puntos)

3. Dada la función $f(x)=\begin{cases}(x+2)^2 & si \;\; x\leq 0\\ -x^2+4 & si \;\; 0<x\leq 2\\ 2x+1 & si \;\; x>2\end{cases}$

a) Estudia la continuidad en $x = 0$. (0.75 puntos)
b) Estudia la continuidad en $x = 2$. (0.75 puntos)
c) Representa gráficamente $f(x)$. (1 punto)

4. Una pastelería hace todos los días tartas y bizcochos. Para una tarta se necesitan 1 kg de harina y 3 kg de azúcar y para un bizcocho se necesitan 2 kg de harina y 2 kg de azúcar. Diariamente han de hacer al menos 2 tartas y 3 bizcochos. Se dispone de 16 kg de harina y 24 kg de azúcar y la tarta se vende por 20 euros, mientras que el bizcocho por 15 euros.
a) Expresa la función objetivo. (0.5 puntos)
b) Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (1.5 puntos)
c) Halla el número de tartas y bizcochos que deben hacerse para que el beneficio sea máximo. (0.5 puntos)

5. En un examen de matemáticas se les proponen a los estudiantes 3 problemas (I, II, III), de los que han de elegir obligatoriamente uno. La mitad de los alumnos eligen el problema I, y de estos aprueban el 60%. El 30% eligen el problema II, suspendiendo en este caso el 25% de los estudiantes. Por último, de los que eligen el problema III, aprueban el 30%.
a) ¿Cuál es la probabilidad de elegir el examen II y aprobar? (0.5 puntos)
b) ¿Cuál es la probabilidad de aprobar el examen? (1 punto)
c) Sabiendo que el estudiante ha suspendido, ¿cuál es la probabilidad de que haya elegido el problema I? (1 punto)

6. En un equipo infantil de fútbol, se tomó una muestra aleatoria de 10 niños y se contaron el número de toques al balón que hacían sin dejar caer la pelota, obteniéndose 12, 16, 25, 18, 13, 8, 10, 9, 12 y 13 toques de balón. Si se sabe que la variable toques de balón sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma=5$ toques.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del número de toques de balón con un nivel de confianza del 95%. (1 punto)
b) Explica, justificando la respuesta, qué ocurrirá con la amplitud del intervalo si para el mismo nivel de confianza disminuimos el tamaño de muestra. (0.75 puntos)
c) El entrenador del equipo afirma que el número medio de toques que pueden dar sus jugadores es de 18. ¿Se puede aceptar la afirmación del entrenador con un nivel de confianza del 90 %? Justificar la respuesta. (0.75 puntos)

z	**0.00**	**0.01**	**0.02**	**0.03**	**0.04**	**0.05**	**0.06**	**0.07**	**0.08**	**0.09**
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

SOLUCIONES

Propuesta A

1. El número de personas que han ido a vacunarse durante ocho semanas consecutivas viene dado por la función $C(x)=x^3-9x^2+15x+50$; siendo *C(x)* el número de personas (en miles) y *x* la semana ($1\le x\le 8$).
a) ¿Cuándo acude más gente? ¿En qué semana van menos personas? (1 punto)
b) ¿Cuántas personas hay en las semanas de máxima y mínima asistencia? (0.5 puntos)
c) ¿En qué intervalo de tiempo decrece la cantidad de personas que acuden a vacunarse? (1 punto)

Utilizamos la derivada para encontrar los puntos críticos de la función *C(x)*.

$$\left.\begin{array}{l} C'(x)=3x^2-18x+15 \\ C'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x^2-18x+15=0 \Rightarrow x^2-6x+5=0 \Rightarrow$$

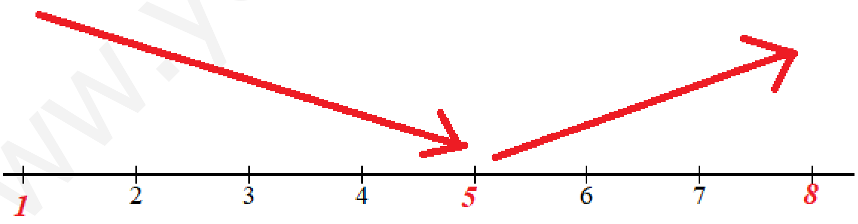
$$\Rightarrow x=\frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot 1\cdot 5}}{2}=\frac{6\pm 4}{2}=\begin{cases} \dfrac{6+4}{2}=5=x \\ \dfrac{6-4}{2}=1=x \end{cases}$$

Analizamos la evolución del signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

En el intervalo $(1,5)$ tomamos *x = 2* y la derivada vale $C'(2)=3\cdot 2^2-18\cdot 2+15=-9<0$. La función decrece en $(1,5)$.

En el intervalo $(5,8)$ tomamos *x = 6* y la derivada vale $C'(6)=3\cdot 6^2-18\cdot 6+15=15>0$. La función crece en $(5,8)$.

La función sigue el esquema siguiente:



Valoramos la función en los extremos del intervalo de definición: *x = 1* y *x = 8*, también en el punto crítico *x = 5*:

$$\left.\begin{array}{l} C(1)=1^3-9\cdot 1^2+15\cdot 1+50=57 \\ C(5)=5^3-9\cdot 5^2+15\cdot 5+50=25 \\ C(8)=8^3-9\cdot 8^2+15\cdot 8+50=106 \end{array}\right\}$$

La función presenta un mínimo relativo y absoluto en *x = 5*.
La función presenta un máximo absoluto en *x = 8*.

a) Acude más gente en la semana 8. Acude menos gente en la semana 5.
b) En la semana de máxima asistencia (8ª) acuden 106000 personas. En la de mínima asistencia (5ª) acuden 25000 personas.
c) Decrece el número de personas de la semana 1ª a la 5ª.

2. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 5 & 1\end{pmatrix}$

a) Calcula la matriz $M = A\cdot B+2I$ donde I es la matriz identidad de orden 3. (1.25 puntos)

b) Calcula, si es posible, la matriz X tal que $X\cdot C=I$ donde I es la matriz identidad de orden 2. (1.25 puntos)

a)

$$M = A\cdot B+2I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 2 & 1-3 & 1-9\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$\boxed{M=\begin{pmatrix}4 & 1 & 1\\ 2 & 0 & -8\\ 0 & 1 & 5\end{pmatrix}}$$

b) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$X\cdot C=I \Rightarrow X=I\cdot C^{-1}=C^{-1}$$

Hallamos la inversa de la matriz C.

$$|C|=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 5 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$$

$$C^{-1}=\frac{Adj\left(C^T\right)}{|C|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 5\\ 0 & 1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -5 & 1\end{pmatrix}$$

Por lo que tenemos que $\boxed{M=C^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -5 & 1\end{pmatrix}}$

3. En la función $f(x)=x^4-8x^2+9$, se pide:
a) Calcular los extremos relativos (máximos y mínimos) de la función. (1.5 puntos)
b) Averiguar los puntos de inflexión. (0.5 puntos)
c) Estudiar la curvatura (intervalos de concavidad y convexidad). (0.5 puntos)

Utilizamos la derivada para encontrar los puntos críticos de la función *f(x)*.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=4x^3-16x \\ f'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 4x^3-16x=0 \Rightarrow 4x\left(x^2-4\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2-4=0 \rightarrow x=\sqrt{4}=\pm 2 \end{cases}$$

Analizamos la evolución del signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

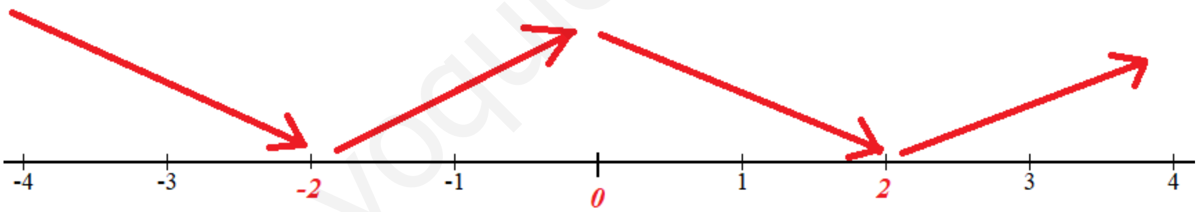
En el intervalo $(-\infty,-2)$ tomamos *x* = *–3* y la derivada vale $f'(-3)=4(-3)^3-16(-3)=-60<0$. La función decrece en $(-\infty,-2)$.

En el intervalo $(-2,0)$ tomamos *x* = *–1* y la derivada vale $f'(-1)=4(-1)^3-16(-1)=12>0$. La función crece en $(-2,0)$.

En el intervalo $(0,2)$ tomamos *x* = *1* y la derivada vale $f'(1)=4(1)^3-16=-12<0$. La función decrece en $(0,2)$.

En el intervalo $(2,+\infty)$ tomamos *x* = *3* y la derivada vale $f'(3)=4(3)^3-16(3)=60>0$. La función crece en $(2,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



a) La función presenta dos mínimos relativos en *x* = *–2* y en *x* = *2*.
La función presenta un máximo relativo en *x* = *0*.

b) Utilizamos la segunda derivada para encontrar los puntos de inflexión.

$$\left.\begin{array}{l} f''(x)=12x^2-16 \\ f''(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 12x^2-16=0 \Rightarrow 12x^2=16 \Rightarrow x^2=\frac{16}{12} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}$$

Averiguamos la evolución de la curvatura antes, entre y después de estos valores.

En el intervalo $\left(-\infty,-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)$ tomamos *x* = *–2* y la derivada segunda vale

$f''(-2)=12(-2)^2-16=32>0$. La función es convexa (∪) en $\left(-\infty,-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)$.

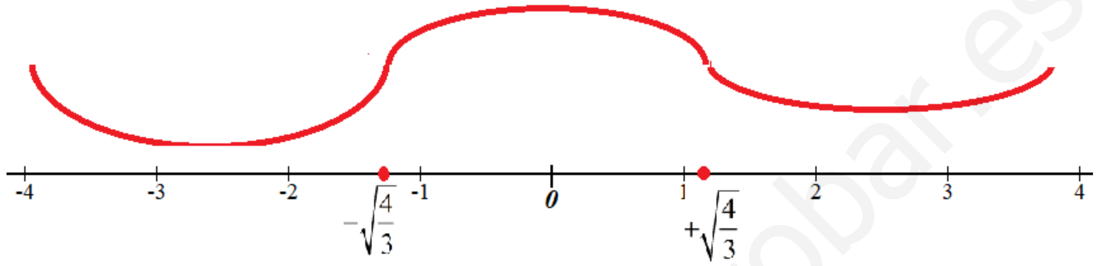
En el intervalo $\left(-\sqrt{\frac{4}{3}},+\sqrt{\frac{4}{3}}\right)$ tomamos $x = 0$ y la derivada segunda vale

$f''(0)=12\cdot 0^2-16=-16<0$. La función es cóncava (∩) en $\left(-\sqrt{\frac{4}{3}},+\sqrt{\frac{4}{3}}\right)$.

En el intervalo $\left(+\sqrt{\frac{4}{3}},+\infty\right)$ tomamos $x = 2$ y la derivada segunda vale

$f''(2)=12\cdot 2^2-16=32>0$. La función es convexa (∪) en $\left(+\sqrt{\frac{4}{3}},+\infty\right)$.

La curvatura sigue el esquema siguiente:



La función presenta dos puntos de inflexión: $x=-\sqrt{\frac{4}{3}}$ y $x=+\sqrt{\frac{4}{3}}$

c) Estudiado en el apartado anterior.

La función es convexa (∪) en $\left(-\infty,-\sqrt{\frac{4}{3}}\right)\cup\left(+\sqrt{\frac{4}{3}},+\infty\right)$ y cóncava (∩) en $\left(-\sqrt{\frac{4}{3}},+\sqrt{\frac{4}{3}}\right)$.

4. En un instituto se ha organizado un concurso literario y han sido seleccionados tres relatos. Hay un jurado para elegir el relato ganador, que está formado por 30 personas, cada miembro del jurado tiene que votar uno de los tres relatos y todos los votos han sido válidos. El relato A ha obtenido el doble número de votos que el relato B, y si uno de los votantes del relato C hubiese dado su voto al relato B, éstos hubieran empatado.
a) Plantea un sistema de ecuaciones que responda a las condiciones del enunciado. (1 punto)
b) Resuelve razonadamente el sistema planteado para determinar cuántos votos ha obtenido cada relato. (1.5 puntos)

a) Llamamos "x" al número de votos al relato A, "y" al número de votos que ha recibido el relato B y "z" al número de votos al relato C.
"Hay un jurado para elegir el relato ganador, que está formado por 30 personas" → $x+y+z=30$
"El relato A ha obtenido el doble número de votos que el relato B" → $x=2y$
"si uno de los votantes del relato C hubiese dado su voto al relato B, éstos hubieran empatado" → $z-1=y+1$.

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=30 \\ x=2y \\ z-1=y+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\left.\begin{array}{l} x+y+z=30 \\ x-2y \quad =0 \\ \quad -y+z=2 \end{array}\right\}}$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=30 \\ x-2y \quad =0 \\ \quad z=2+y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+2+y=30 \\ x-2y \quad =0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y=28 \\ x=2y \end{array}\right\} \Rightarrow 2y+2y=28 \Rightarrow 4y=28 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y=\frac{28}{4}=7} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{z=2+7=9} \\ \boxed{x=2\cdot 7=14} \end{cases}$$

El relato A ha recibido 14 votos, el relato B ha recibido 7 y el relato C ha recibido 9.

5. En una clase formada por 32 alumnos, 20 han aprobado Matemáticas, 17 han aprobado Física y 8 han suspendido las dos asignaturas.
a) ¿Cuál es la probabilidad de suspender alguna de las dos asignaturas? (1.25 puntos)
b) ¿Cuál es la probabilidad de aprobar las dos asignaturas? (1.25 puntos)

Realizamos una tabla de contingencia para obtener toda la información sobre la distribución de las notas.

	Aprobados en Física	Suspensos en Física	
Aprobados en Matemáticas			**20**
Suspensos en Matemáticas		**8**	
	17		**32**

Completamos la tabla.

	Aprobados en Física (F)	Suspensos en Física (F^C)	
Aprobados en Matemáticas (M)	**13**	**7**	**20**
Suspensos en Matemáticas (M^C)	**4**	**8**	**12**
	17	**15**	**32**

a) Observando los datos de la tabla y aplicando la regla de Laplace.

$$P\left(M^C \cup F^C\right) = P\left(M^C\right) + P\left(F^C\right) - P\left(M^C \cap F^C\right) = \frac{12}{32} + \frac{15}{32} - \frac{8}{32} = \boxed{\frac{19}{32} = 0.59375}$$

También se puede resolver utilizando el suceso contrario. El suceso contrario a suspender alguna de las asignaturas es aprobar todas las asignaturas.

$$P\left(M^C \cup F^C\right) = 1 - P\left(M \cap F\right) = 1 - \frac{13}{32} = \boxed{\frac{19}{32} = 0.59375}$$

b) Observando los datos de la tabla y aplicando la regla de Laplace.

$$P\left(M \cap F\right) = \boxed{\frac{13}{32} = 0.40625}$$

6. Un fabricante de bombillas ha tomado una muestra aleatoria de 49 bombillas y ha medido el tiempo en horas que tardan en fundirse, proporcionando una media de 364 horas. Si se sabe que el tiempo que tardan en fundirse sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 515.29\, horas^2$, se pide:
a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo que tardan en fundirse con un nivel de confianza del 97%: (1 punto)
b) Explica, justificando la respuesta, qué se podría hacer para conseguir un intervalo de confianza con mayor amplitud para el mismo nivel de confianza. (0.75 puntos)
c) El fabricante afirma que el tiempo que tardan en fundirse es de 370 horas. ¿Se puede aceptar la afirmación del fabricante con un nivel de confianza del 99 %? Justificar la respuesta. (0.75 puntos)

X ="Tiempo en horas que tarda en fundirse una bombilla"

$$\sigma^2 = 515.29\, horas^2 \Rightarrow \sigma = \sqrt{515.29} = 22.7$$

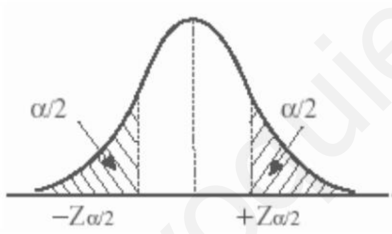
X = N(μ, 22.7)

El tamaño de la muestra es $n = 49$ y la media muestral es $\bar{x} = 364$

a) Con un nivel de confianza del 97%

$$1 - \alpha = 0,97 \rightarrow \alpha = 0,03 \rightarrow \alpha/2 = 0'015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,985 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2.17}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.981
2.1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9850	0.98



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.17 \cdot \frac{22.7}{\sqrt{49}} = 7.037$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(364 - 7.037, 364 + 7.037\right) = \left(356.963, 371.037\right)$$

b) Para tener mayor amplitud en el intervalo de confianza el error debe ser mayor y el error aumenta si disminuimos el tamaño de la muestra, pues si mantenemos el nivel de confianza $z_{\alpha/2}$ se mantiene igual y σ es constante. $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

c) Con un nivel de confianza mayor del 97 % obtendremos un $z_{\alpha/2}$ mayor y el $Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ será mayor (amplitud del intervalo de confianza mayor).

Como 370 está en el intervalo de confianza con un 97 % de nivel de confianza también lo estará en el del 99 %.
Se puede aceptar la afirmación de que el tiempo que tardan en fundirse es de 370 horas con un nivel de confianza del 99 %.

Propuesta B

1. El consumo de energía, en kWh, de un determinado hogar a lo largo de un año viene reflejado por la función $C(x)=x^3-15x^2+48x+100$, siendo x los meses del año de enero a diciembre ($1\le x\le 12$):
a) ¿En qué mes se produjo el mayor consumo de energía y cuántos kWh se consumieron? (1.25 puntos)
b) ¿En qué intervalos de tiempo crece el consumo de energía? (1.25 puntos)

Estudiamos la evolución del consumo de energía usando la derivada.
Buscamos los puntos críticos de la función $C(x)=x^3-15x^2+48x+100$ en el intervalo $1\le x\le 12$.

$$\left.\begin{array}{l} C'(x)=3x^2-30x+48 \\ C'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x^2-30x+48=0 \Rightarrow x^2-10x+16=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{10\pm\sqrt{(-10)^2-4\cdot 1\cdot 16}}{2}=\frac{10\pm 6}{2}=\begin{cases} \frac{10+6}{2}=8=x \\ \frac{10-6}{2}=2=x \end{cases}$$

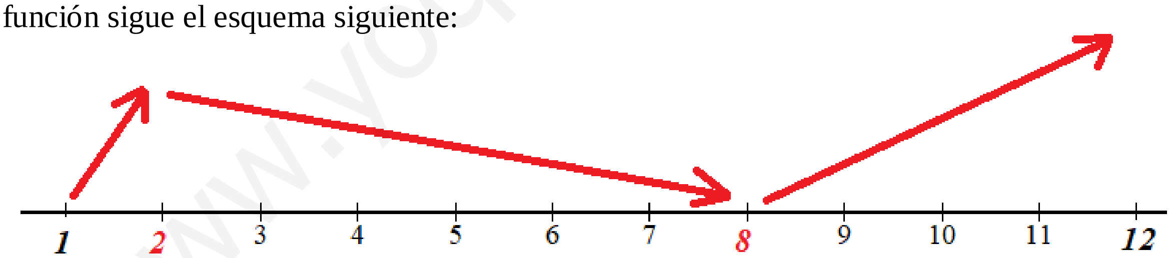
Analizamos la evolución del signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

En el intervalo $[1,2)$ tomamos x = *1* y la derivada vale $C'(1)=3\cdot 1^2-30\cdot 1+48=21>0$. La función crece en $[1,2)$.

En el intervalo $(2,8)$ tomamos x = *5* y la derivada vale $C'(5)=3\cdot 5^2-30\cdot 5+48=-27<0$. La función decrece en $(2,8)$.

En el intervalo $(8,12]$ tomamos x = *10* y la derivada vale $C'(10)=3\cdot 10^2-30\cdot 10+48=48>0$. La función crece en $(8,12]$.

La función sigue el esquema siguiente:



a) Valoramos la función en los extremos del intervalo de definición $1\le x\le 12$, y en los puntos críticos obtenidos: $x=2$, $x=8$.

$$\left.\begin{array}{l} C(1)=1^3-15\cdot 1^2+48\cdot 1+100=134 \\ C(2)=2^3-15\cdot 2^2+48\cdot 2+100=144 \\ C(8)=8^3-15\cdot 8^2+48\cdot 8+100=36 \text{ ¡Mínimo!} \\ C(12)=12^3-15\cdot 12^2+48\cdot 12+100=244 \text{ ¡Máximo!} \end{array}\right\}$$

El mes de mayor consumo fue en el mes 12 (diciembre) con un consumo de 244 kWh.

b) La función consumo crece en $[1,2)\cup(8,12]$. El consumo creció durante los dos primeros meses (enero y febrero) y durante los últimos 4 meses (de agosto a diciembre).

2. Dadas las matrices $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -1 & 0\\ 2 & -3\end{pmatrix}$ $D=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ (I la matriz identidad de orden 2):

a) Calcula $C\cdot B^2\cdot 2I$. (1 punto)

b) Calcula, si es posible, la matriz X tal que $BX-I=D^T$. (1.5 puntos)

a)

$$B^2=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3+6\\ 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 9\\ 0 & 4\end{pmatrix}$$

$$2I=2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$C\cdot B^2\cdot 2I=\begin{pmatrix}1 & 4\\ -1 & 0\\ 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 9\\ 0 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 9+16\\ -1 & -9\\ 2 & 18-12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 25\\ -1 & -9\\ 2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$\boxed{C\cdot B^2\cdot 2I=\begin{pmatrix}2 & 50\\ -2 & -18\\ 4 & 12\end{pmatrix}}$$

b) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$BX-I=D^T\Rightarrow BX=D^T+I\Rightarrow X=B^{-1}\left(D^T+I\right)$$

Determinamos la expresión de la matriz X.

$$D^T=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$$

$$|B|=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{vmatrix}=2\neq 0 \qquad B^{-1}=\frac{Adj\left(B^T\right)}{|B|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 2\end{pmatrix}}{2}=\frac{\begin{pmatrix}2 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}}{2}=\begin{pmatrix}1 & -3/2\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}$$

$$X=B^{-1}\left(D^T+I\right)=\begin{pmatrix}1 & -3/2\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1 & -3/2\\ 0 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1-3 & 1-3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}-4 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}}$$

3. Dada la función $f(x)=\begin{cases}(x+2)^2 & si \;\; x\le 0\\ -x^2+4 & si \;\; 0<x\le 2\\ 2x+1 & si \;\; x>2\end{cases}$

a) Estudia la continuidad en *x = 0.* (0.75 puntos)
b) Estudia la continuidad en *x = 2.* (0.75 puntos)
c) Representa gráficamente *f (x).* (1 punto)

a)

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=(0+2)^2=4 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x+2)^2=4 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}-x^2+4=-0^2+4=4 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \text{ es continua en } x=0$$

b)

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=-2^2+4=0 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}-x^2+4=0 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}2x+1=4+1=5 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) \text{ es discontinua en } x=2$$

c) Realizamos unas tablas de valores y representamos la función a trozos. Sabemos que son dos trozos de parábola y una semirrecta.

$x\le 0$

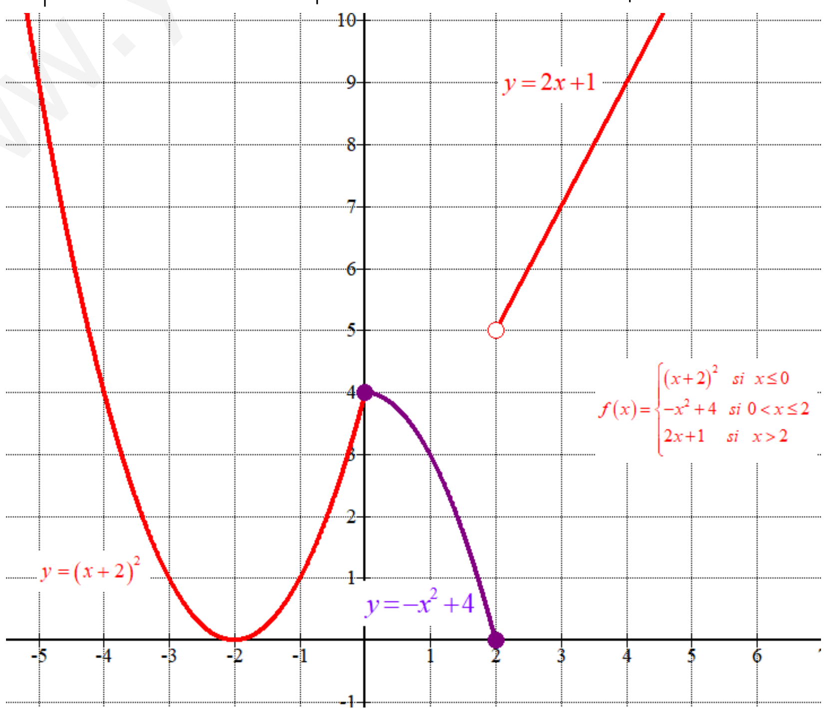
x	$y=(x+2)^2$
0	4
-1	1
-2	0
-3	1

$0<x\le 2$

x	$y=-x^2+4$
0	4 (*No incluido*)
1	3
2	0

$x>2$

x	$y=2x+1$
2	5(*No incluido*)
3	7
4	9



4. Una pastelería hace todos los días tartas y bizcochos. Para una tarta se necesitan 1 kg de harina y 3 kg de azúcar y para un bizcocho se necesitan 2 kg de harina y 2 kg de azúcar. Diariamente han de hacer al menos 2 tartas y 3 bizcochos. Se dispone de 16 kg de harina y 24 kg de azúcar y la tarta se vende por 20 euros, mientras que el bizcocho por 15 euros.

a) Expresa la función objetivo. (0.5 puntos)

b) Escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido. (1.5 puntos)

c) Halla el número de tartas y bizcochos que deben hacerse para que el beneficio sea máximo. (0.5 puntos)

Es un problema de programación lineal.
Llamamos x = número de tartas fabricadas e y = número de bizcochos.

Hacemos una tabla para aclarar los datos.

	kgs de harina	Kgs de azúcar	Beneficio
Nº tartas (x)	x	3x	20x
Nº bizcochos (y)	2y	2y	15y
TOTALES	$x+2y$	$3x+2y$	$20x+15y$

a) La función objetivo que deseamos maximizar es el beneficio $B(x,y)=20x+15y$.

b) Las restricciones nos dan las siguientes inecuaciones.

"Diariamente han de hacer al menos 2 tartas y 3 bizcochos" → $x \geq 2;\ y \geq 3$

"Se dispone de 16 kg de harina y 24 kg de azúcar" → $x+2y \leq 16; \quad 3x+2y \leq 24$

La región factible es la zona del plano que cumple el sistema de inecuaciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 2;\ y \geq 3 \\ 3x+2y \leq 24 \\ x+2y \leq 16 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$3x+2y=24$

x	$y=\dfrac{24-3x}{2}$
0	12
4	6
8	0

$x+2y=16$

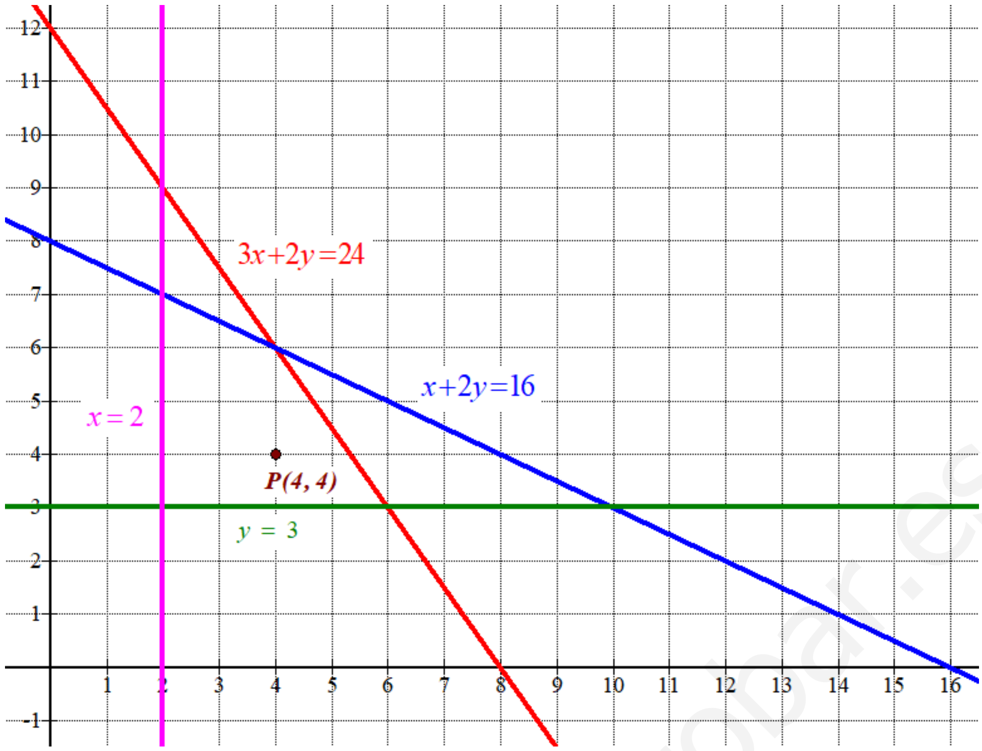
x	$y=\dfrac{16-x}{2}$
0	8
2	7
16	0

$y=3$

x	$y=3$
0	3
2	3

$x=2$

$x=2$	y
2	0
2	3
2	7

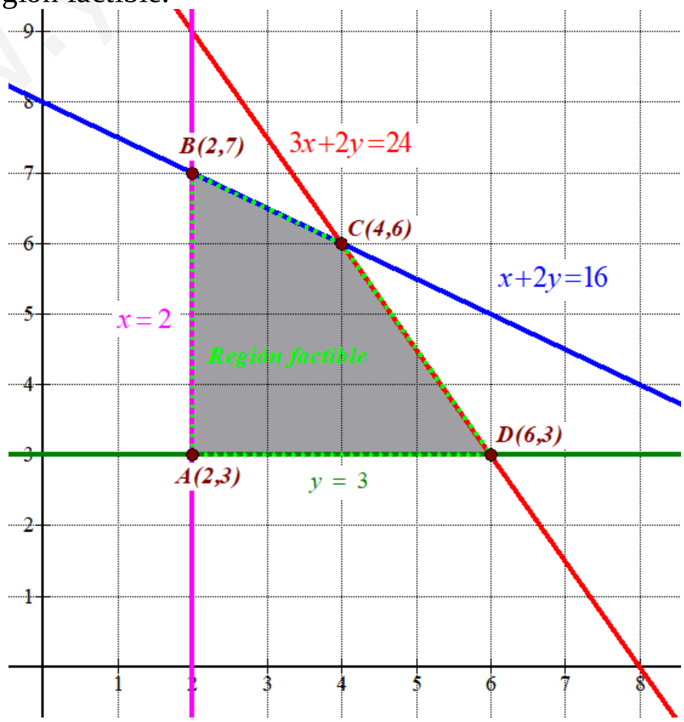


Las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x \geq 2;\ y \geq 3 \\ 3x+2y \leq 24 \\ x+2y \leq 16 \end{array}\right\}$ y la región factible es la región del plano que está a la derecha de la recta vertical rosa, por debajo de las rectas **azul** y roja y por encima de la recta horizontal verde.

Comprobamos que el punto P(4, 4) cumple todas las restricciones.

$\left.\begin{array}{l} 4 \geq 2;\ 4 \geq 3 \\ 3 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \leq 24 \\ 4 + 2 \cdot 4 \leq 16 \end{array}\right\}$ Se cumplen todas y la región factible es correcta.

Coloreo de gris la región factible.



c) Valoramos la función beneficio $B(x,y)=20x+15y$ en cada uno de los vértices en busca del máximo valor.

A(2, 3) → $B(2,3)=20\cdot 2+15\cdot 3=85$

B(2, 7) → $B(2,7)=20\cdot 2+15\cdot 7=145$

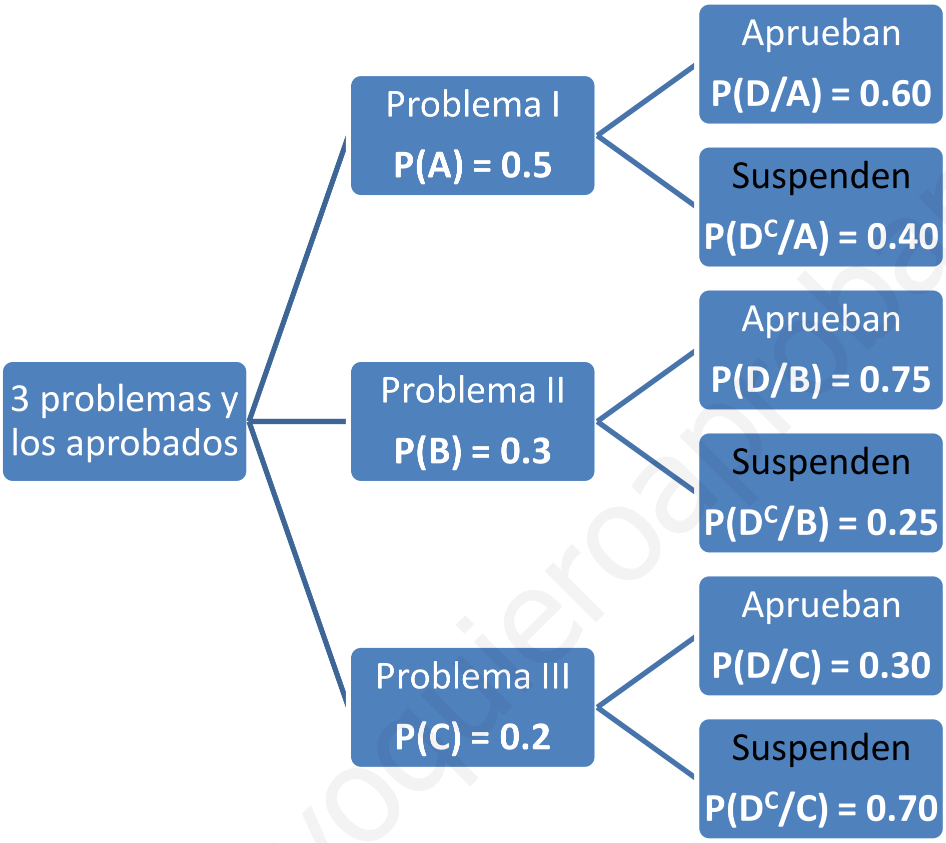
$C(4,6)$ → $B(4,6)=20\cdot 4+15\cdot 6=170$ ¡*Máximo*!

D(6, 3) → $B(6,3)=20\cdot 6+15\cdot 3=165$

El máximo beneficio se obtiene en el punto C(4, 6) que significa fabricar 4 tartas y 6 bizcochos. Obteniéndose un beneficio máximo de 170 euros.

5. En un examen de matemáticas se les proponen a los estudiantes 3 problemas (I, II, III), de los que han de elegir obligatoriamente uno. La mitad de los alumnos eligen el problema I, y de estos aprueban el 60%. El 30% eligen el problema II, suspendiendo en este caso el 25% de los estudiantes. Por último, de los que eligen el problema III, aprueban el 30%.
a) ¿Cuál es la probabilidad de elegir el examen II y aprobar? (0.5 puntos)
b) ¿Cuál es la probabilidad de aprobar el examen? (1 punto)
c) Sabiendo que el estudiante ha suspendido, ¿cuál es la probabilidad de que haya elegido el problema I? (1 punto)

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Nos piden calcular $P(B \cap D)$.

$$P(B \cap D) = P(B) \cdot P(D/B) = 0.3 \cdot 0.75 = \boxed{0.225}$$

b) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D) =$$

$$= P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C) =$$

$$= 0.5 \cdot 0.6 + 0.3 \cdot 0.75 + 0.2 \cdot 0.3 = \boxed{0.585}$$

c) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/D^C) = \frac{P(A \cap D^C)}{P(D^C)} = \frac{P(A) \cdot P(D^C/A)}{1 - P(D)} = \frac{0.5 \cdot 0.4}{1 - 0.585} = \boxed{\frac{40}{83} \simeq 0.482}$$

6. En un equipo infantil de fútbol, se tomó una muestra aleatoria de 10 niños y se contaron el número de toques al balón que hacían sin dejar caer la pelota, obteniéndose 12, 16, 25, 18, 13, 8, 10, 9, 12 y 13 toques de balón. Si se sabe que la variable toques de balón sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 5$ toques.
a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del número de toques de balón con un nivel de confianza del 95%. (1 punto)
b) Explica, justificando la respuesta, qué ocurrirá con la amplitud del intervalo si para el mismo nivel de confianza disminuimos el tamaño de muestra. (0.75 puntos)
c) El entrenador del equipo afirma que el número medio de toques que pueden dar sus jugadores es de 18. ¿Se puede aceptar la afirmación del entrenador con un nivel de confianza del 90 %? Justificar la respuesta. (0.75 puntos)

X = El número de toques de balón.
X = N(μ, 5)

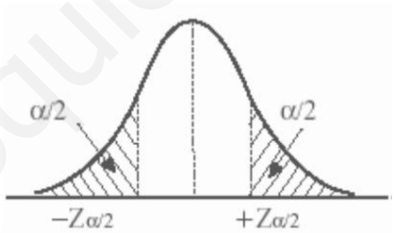
$$Media\ muestral = \bar{x} = \frac{12+16+25+18+13+8+10+9+12+13}{10} = 13.6\ toques$$

Tamaño de la muestra = $n = 10$

a) Con un nivel de confianza del 95 %

$1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow \alpha/2 = 0'025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.96}$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{5}{\sqrt{10}} \simeq 3.099$$

El intervalo de confianza para la media de la población es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(13.6 - 3.099, 13.6 + 3.099\right) = \left(10.501, 16.099\right)$$

b) Si disminuimos el tamaño de la muestra, manteniendo el nivel de confianza y por lo tanto el valor de $z_{\alpha/2}$ aumentará el error y por tanto aumenta la amplitud del intervalo de confianza.

$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ Intervalo de confianza $\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right)$

c) Si disminuimos el nivel de confianza tendremos un valor de $z_{\alpha/2}$ más pequeño y el error será menor, siendo menor la amplitud del intervalo de confianza. Como 18 toques no está en el intervalo de confianza con un nivel de confianza del 95 % tampoco lo estará con un nivel de confianza menor. No se puede aceptar la afirmación del entrenador.