UNIVERSIDAD DE CANTABRIA
PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD PARA MAYORES DE 25 AÑOS
MAYO 2023

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

INDICACIONES

- El examen consta de seis ejercicios, de los cuales se resolverán únicamente tres (cualesquiera). En caso de intentar resolver más de tres ejercicios, se corregirán únicamente los tres primeros que aparezcan en el cuadernillo del examen.
- **Cada ejercicio se calificará sobre una puntuación máxima de 10 puntos. La nota del examen será la media aritmética de esas tres puntuaciones.**
- Se valorará positivamente la explicación de los diferentes pasos seguidos en la resolución de cada ejercicio, así como la claridad de exposición. **No se admitirá ningún resultado que no esté debidamente justificado.**
- Se permite utilizar una calculadora científica básica con funciones estadísticas, pero **queda prohibido el uso de calculadoras gráficas y/o programables, así como el de cualquier dispositivo con capacidad de almacenar y/o transmitir datos.**

EJERCICIO 1 [10 puntos]

Un hotel dispone de habitaciones individuales, dobles y triples al precio de 60€/noche, 80€/noche y 100€/noche, respectivamente. Una agencia de viajes hace una reserva de habitaciones para una noche que tiene un coste total de 6300€. Se sabe que el número de habitaciones dobles en la reserva es el triple del de habitaciones individuales, y el número de habitaciones triples es la mitad del de habitaciones dobles.

a) [4,5 puntos] Plantee el sistema de ecuaciones lineales que permite calcular el número de habitaciones individuales, dobles y triples que ha reservado la agencia de viajes.

b) [5,5 puntos] Resuélvalo.

EJERCICIO 2 [10 puntos]

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$

Encuentre la matriz X que satisface la ecuación matricial $AX = B^t - 2I$, donde B^t es la transpuesta de B e I es la matriz identidad.

EJERCICIO 3 [10 puntos]

a) [5 puntos] Se sabe que la función $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + c$ pasa por el punto (1, 0) y tiene extremos relativos en $x = -1$ y $x = 2$. Calcule a, b, c.

b) [5 puntos] ¿Qué valores han de tomar los parámetros a y b para que la siguiente función, definida a trozos, sea continua?

$$f(x)=\begin{cases} 3x+5 & si \quad x<-1 \\ ax^2+bx & si \quad -1\le x\le 2 \\ 2x-6 & si \quad x>2 \end{cases}$$

EJERCICIO 4 [10 puntos]

Considere la función: $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x^2+x-6}$

a) [1 punto] ¿Cuál es su dominio?
b) [5 puntos] Calcule el límite de *f(x)* en los puntos no pertenecientes al dominio. En caso de que los límites laterales no coincidan, calcúlelos también.
c) [1 punto] ¿Qué tipo de discontinuidad existe en cada uno de los puntos no pertenecientes al dominio?
d) [3 puntos] ¿Cuánto vale $f'(x=0)$?

EJERCICIO 5 [10 puntos]

La federación cántabra de tenis realiza una encuesta entre sus tenistas federados para saber en cuántas competiciones oficiales participan anualmente. Esta tabla recoge los resultados obtenidos:

Nº de competiciones	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Nº de tenistas	**12**	**22**	**28**	**36**	**41**	**27**	**11**	**5**

Calcule los siguientes estadísticos para el número de competiciones en las que los tenistas federados cántabros participan anualmente.
a) [2 puntos] Media.
b) [2 puntos] Moda.
c) [3 puntos] Mediana.
d) [3 puntos] Desviación típica.

Nota: *Es necesario indicar la fórmula correspondiente en cada caso. De lo contrario, no se tendrá en cuenta la respuesta.*

EJERCICIO 6 [10 puntos]

El 65% de los vehículos que fabrica una empresa de automoción son turismos, el 20% todoterrenos y el resto motos. El 25% de los turismos, el 10% de los todoterrenos y el 65% de las motos son eléctricos. Si se escoge un vehículo al azar de entre todos los que se fabrican:
a) [2 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que sea un todoterreno y no sea eléctrico?
b) [2 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que sea un turismo y sea eléctrico?
c) [3 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que sea eléctrico?
d) [3 puntos] Si no es eléctrico, ¿cuál es la probabilidad de que sea una moto?

SOLUCIONES

EJERCICIO 1 [10 puntos]
Un hotel dispone de habitaciones individuales, dobles y triples al precio de 60€/noche, 80€/noche y 100€/noche, respectivamente. Una agencia de viajes hace una reserva de habitaciones para una noche que tiene un coste total de 6300€. Se sabe que el número de habitaciones dobles en la reserva es el triple del de habitaciones individuales, y el número de habitaciones triples es la mitad del de habitaciones dobles.
a) [4,5 puntos] Plantee el sistema de ecuaciones lineales que permite calcular el número de habitaciones individuales, dobles y triples que ha reservado la agencia de viajes.
b) [5,5 puntos] Resuélvalo.

a) Llamamos "x" al número de habitaciones individuales, "y" al de habitaciones dobles, "z" al de habitaciones triples.

"Al precio de 60€/noche, 80€/noche y 100€/noche, respectivamente una noche para todos cuesta 6300 €" → $60x+80y+100z=6300$

"El número de habitaciones dobles en la reserva es el triple del de habitaciones individuales" → $y=3x$

"El número de habitaciones triples es la mitad del de habitaciones dobles" → $z=\frac{y}{2}$

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema.

$$\left.\begin{array}{l} 60x+80y+100z=6300 \\ y=3x \\ z=\frac{y}{2} \end{array}\right\}$$

b) Lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} 60x+80y+100z=6300 \\ y=3x \\ z=\frac{y}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 6x+8y+10z=630 \\ \frac{y}{3}=x \\ z=\frac{y}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow 6\frac{y}{3}+8y+10\frac{y}{2}=630 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y+8y+5y=630 \Rightarrow 15y=630 \Rightarrow \boxed{y=\frac{630}{15}=42} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{x=\frac{42}{3}=14} \\ \boxed{z=\frac{42}{2}=21} \end{array}\right.$$

La reserva es de 14 habitaciones individuales, 42 dobles y 21 triples.

EJERCICIO 2 [10 puntos]

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$

Encuentre la matriz X que satisface la ecuación matricial $AX = B^t - 2I$, donde B^t es la transpuesta de B e I es la matriz identidad.

Despejamos X en la ecuación matricial.

$$AX = B^t - 2I \Rightarrow X = A^{-1}\left(B^t - 2I\right)$$

Hallamos la inversa de A.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 4+8=12 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}}{12} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 & -1/3 \\ 1/6 & 1/6 \end{pmatrix}$$

Hallamos la expresión de X.

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$B^t - 2I = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 & -4 \\ 1 & -3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}\left(B^t - 2I\right) = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} -2-4 & -8+20 \\ -2+2 & -8-10 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} -6 & 12 \\ 0 & -18 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ 0 & -3/2 \end{pmatrix}}$$

EJERCICIO 3 [10 puntos]

a) [5 puntos] Se sabe que la función $f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$ pasa por el punto (1, 0) y tiene extremos relativos en $x = -1$ y $x = 2$. Calcule a, b, c.

b) [5 puntos] ¿Qué valores han de tomar los parámetros a y b para que la siguiente función, definida a trozos, sea continua?

$$f(x)=\begin{cases} 3x+5 & si \quad x<-1 \\ ax^2+bx & si \quad -1\le x\le 2 \\ 2x-6 & si \quad x>2 \end{cases}$$

a) Si la función $f(x)=2x^3+ax^2+bx+c$ pasa por el punto (1, 0) → $f(1)=0$.

$$f(1)=0 \Rightarrow 2\cdot 1^3+a\cdot 1^2+b\cdot 1+c=0 \Rightarrow 2+a+b+c=0 \Rightarrow a+b+c=-2$$

Si la función tiene extremos relativos en $x = -1$ y $x = 2$ significa que se anula la derivada en dichos valores → $\begin{cases} f'(-1)=0 \\ f'(2)=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} f'(x)=6x^2+2ax+b \\ f'(-1)=0 \\ f'(2)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0=6\cdot(-1)^2+2a\cdot(-1)+b \\ 0=6\cdot 2^2+2a\cdot 2+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0=6-2a+b \\ 0=24+4a+b \end{cases}$$

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\begin{cases} a+b+c=-2 \\ 6-2a+b=0 \\ 24+4a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b+c=-2 \\ b=2a-6 \\ 24+4a+b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+2a-6+c=-2 \\ 24+4a+2a-6=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a+c=4 \\ 6a=-18 \rightarrow \boxed{a=\dfrac{-18}{6}=-3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(-3)+c=4 \rightarrow -9+c=4 \rightarrow \boxed{c=13} \\ b=2(-3)-6 \rightarrow \boxed{b=-12} \end{cases}$$

La solución es $a = -3$, $b = -12$, $c = 13$.

b) Si la función es continua debe serlo en $x = -1$ y en $x = 2$.

Es continua en $x = -1$.

$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=a(-1)^2+b(-1)=a-b \\ \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-} 3x+5=-3+5=2 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} ax^2+bx=a-b \\ f(-1)=\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow a-b=2$$

Es continua en $x = 2$.

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=a(2)^2+b(2)=4a+2b \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} ax^2+bx=4a+2b \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} 2x-6=4-6=-2 \\ f(2)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow 4a+2b=-2$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} 4a+2b=-2 \\ a-b=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2a+b=-1 \\ a=b+2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2(b+2)+b=-1 \Rightarrow 2b+4+b=-1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3b=-5 \Rightarrow \boxed{b=\frac{-5}{3}} \Rightarrow \boxed{a=\frac{-5}{3}+2=\frac{1}{3}}$$

Los valores buscados son $a=\frac{1}{3};\ b=\frac{-5}{3}$

EJERCICIO 4 [10 puntos]

Considere la función: $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x^2+x-6}$

a) [1 punto] ¿Cuál es su dominio?

b) [5 puntos] Calcule el límite de *f(x)* en los puntos no pertenecientes al dominio. En caso de que los límites laterales no coincidan, calcúlelos también.

c) [1 punto] ¿Qué tipo de discontinuidad existe en cada uno de los puntos no pertenecientes al dominio?

d) [3 puntos] ¿Cuánto vale $f'(x=0)$?

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$x^2+x-6=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(-6)}}{2}=\frac{-1\pm 5}{2}=\begin{cases}\dfrac{-1+5}{2}=2=x\\[2mm] \dfrac{-1-5}{2}=-3=x\end{cases}$$

El dominio es $\mathbb{R}-\{-3,2\}$

b) En $x=-3$.

$$\lim_{x\to -3} f(x)=\lim_{x\to -3}\frac{x^2-2x}{x^2+x-6}=\frac{(-3)^2-2(-3)}{(-3)^2-3-6}=\frac{15}{0}=$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\lim_{x\to -3^-}\frac{x^2-2x}{x^2+x-6}=\lim_{x\to -3^-}\frac{x^2-2x}{(x+3)(x-2)}=\frac{15}{0^+}=+\infty\\[2mm] \displaystyle\lim_{x\to -3^+}\frac{x^2-2x}{x^2+x-6}=\lim_{x\to -3^+}\frac{x^2-2x}{(x+3)(x-2)}=\frac{15}{0^-}=-\infty\end{cases} \Rightarrow \boxed{\lim_{x\to -3} f(x)=\infty}$$

En $x=2$.

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x^2+x-6}=\frac{(2)^2-2(2)}{(2)^2+2-6}=\frac{0}{0}=Indeterminación=\lim_{x\to 2}\frac{x\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x}{x+3}=\frac{2}{2+3}=\boxed{\frac{2}{5}}$$

c) En $x=-3$ hay una discontinuidad inevitable de salto infinito, pues los límites laterales valen ∞.

En $x=2$ hay una discontinuidad evitable dando a la función el valor 2/5 → $f(2)=\dfrac{2}{5}$

d)

$$f(x)=\frac{x^2-2x}{x^2+x-6}=\frac{x(x-2)}{(x+3)(x-2)}=\frac{x}{x+3}\Rightarrow f'(x)=\frac{1(x+3)-1\cdot x}{(x+3)^2}=\frac{x+3-x}{(x+3)^2}=\frac{3}{(x+3)^2}$$

$$\boxed{f'(0)=\frac{3}{(0+3)^2}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}}$$

EJERCICIO 5 [10 puntos]

La federación cántabra de tenis realiza una encuesta entre sus tenistas federados para saber en cuántas competiciones oficiales participan anualmente. Esta tabla recoge los resultados obtenidos:

Nº de competiciones	0	1	2	3	4	5	6	7
Nº de tenistas	12	22	28	36	41	27	11	5

Calcule los siguientes estadísticos para el número de competiciones en las que los tenistas federados cántabros participan anualmente.

a) [2 puntos] Media.
b) [2 puntos] Moda.
c) [3 puntos] Mediana.
d) [3 puntos] Desviación típica.

Nota: *Es necesario indicar la fórmula correspondiente en cada caso. De lo contrario, no se tendrá en cuenta la respuesta.*

a) Media.

$$\bar{x}=\frac{\sum f_i \cdot x_i}{N}=\frac{12\cdot 0+22\cdot 1+28\cdot 2+36\cdot 3+41\cdot 4+27\cdot 5+11\cdot 6+5\cdot 7}{12+22+28+36+41+27+11+5}=\frac{586}{182}\simeq 3.2198 \text{ competiciones}$$

b) Moda = 4 competiciones, pues tiene la frecuencia más alta (41 tenistas)

c) Mediana. Añadimos la frecuencia acumulada.

Nº de competiciones	0	1	2	3	4	5	6	7
Nº de tenistas	12	22	28	36	41	27	11	5
Acumulada	12	34	62	98	139	166	177	182

$$\frac{182}{2}=91 \Rightarrow \begin{cases} 91^{o} \rightarrow 3 competiciones \\ 92^{o} \rightarrow 3 competiciones \end{cases} \Rightarrow Mediana = 3 competiciones$$

d) Desviación típica.(σ)

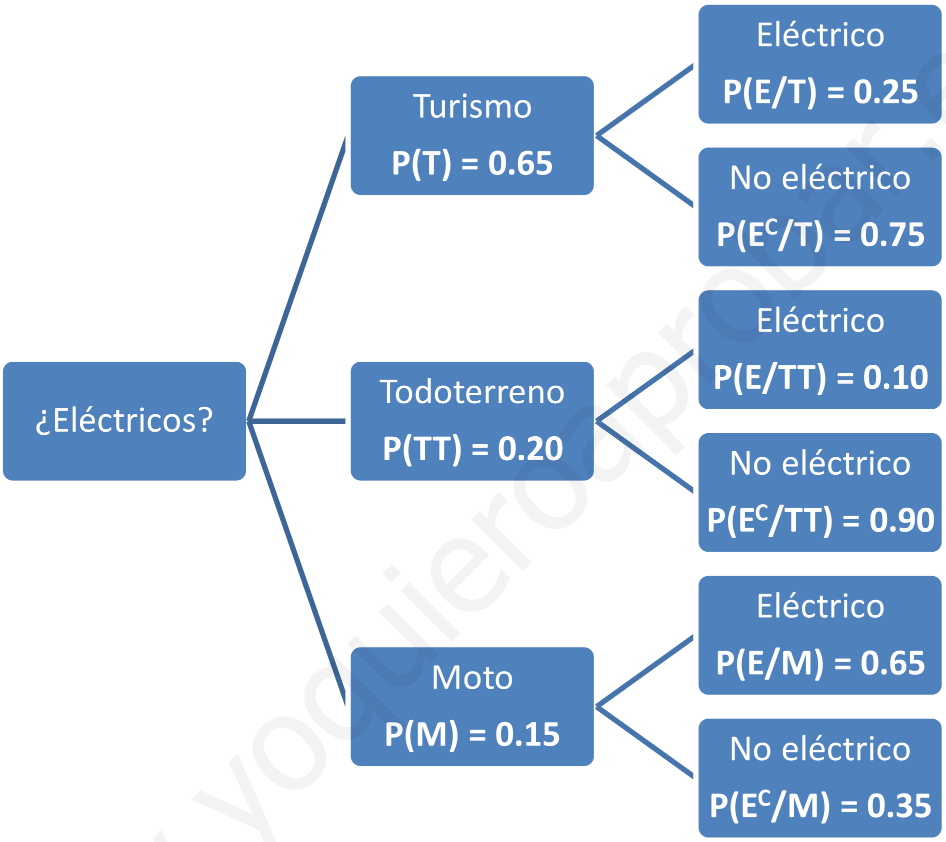
Utilizamos las fórmulas: $Varianza=\frac{\sum x_i^2 \cdot f_i}{N}-\bar{x}^2; \qquad \sigma=\sqrt{Varianza}$.

$$Varianza=\frac{0^2\cdot 12+1^2\cdot 22+2^2\cdot 28+3^2\cdot 36+4^2\cdot 41+5^2\cdot 27+6^2\cdot 11+7^2\cdot 5}{182}-\left(\frac{586}{182}\right)^2$$

$$\boxed{\sigma=\sqrt{Varianza}=\sqrt{2.98}\simeq 1.7276 competiciones}$$

EJERCICIO 6 [10 puntos]
El 65% de los vehículos que fabrica una empresa de automoción son turismos, el 20% todoterrenos y el resto motos. El 25% de los turismos, el 10% de los todoterrenos y el 65% de las motos son eléctricos. Si se escoge un vehículo al azar de entre todos los que se fabrican:
a) [2 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que sea un todoterreno y no sea eléctrico?
b) [2 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que sea un turismo y sea eléctrico?
c) [3 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que sea eléctrico?
d) [3 puntos] Si no es eléctrico, ¿cuál es la probabilidad de que sea una moto?

Llamamos T=”Ser Turismo”, TT = “Ser TodoTerreno”, M = “Ser Moto”, E = “Ser eléctrico”. Realizamos un diagrama de árbol para organizar mejor toda la información.



a) $P\left(TT \cap E^C\right) = P\left(TT\right) P\left(E^C / TT\right) = 0.20 \cdot 0.90 = \boxed{0.18}$

b) $P\left(T \cap E\right) = P\left(T\right) P\left(E / T\right) = 0.65 \cdot 0.25 = \boxed{0.1625}$

c) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(E) = P(T \cap E) + P(TT \cap E) + P(M \cap E) =$$
$$= P(T)P(E/T) + P(TT)P(E/TT) + P(M)P(E/M) =$$
$$= 0.65 \cdot 0.25 + 0.20 \cdot 0.1 + 0.15 \cdot 0.65 = \boxed{0.28}$$

d) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P\left(M / E^C\right) = \frac{P\left(M \cap E^C\right)}{P\left(E^C\right)} = \frac{P(M) P\left(E^C / M\right)}{1 - P(E)} = \frac{0.15 \cdot 0.35}{1 - 0.28} = \boxed{\frac{7}{96} \simeq 0.0729}$$