Universidad de Oviedo

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

OPCIÓN A

1.- Responder, razonadamente, a las siguientes cuestiones:

a) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$. Calcular el determinante de la matriz: $3I-A^2$, siendo I la matriz identidad (o unidad) de orden 2 (1,5 puntos).

b) Estudiar el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ (2 puntos).

Solución:

a) $3I-A^2=3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -2 & 5\end{pmatrix}$

Por lo tanto $\left|3I-A^2\right|=\begin{vmatrix}4 & 1\\ -2 & 5\end{vmatrix}=20+2=22$

b) El rango de la matriz podemos obtenerlo aplicando el **<u>método de Gauss</u>.**

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Tenemos una forma escalonada con tres pivotes no nulos $\Rightarrow rg(A)=3$.

También podemos calcular el rango de la matriz trabajando con **<u>determinantes</u>**:

El rango de una matriz se define como el orden del mayor menor no nulo que se puede extraer de la matriz. Siendo un menor de una matriz, el determinante de una submatriz cuadrada obtenida a partir de la matriz A (combinando filas y columnas de la matriz A).

Atendiendo a esta definición, como A es una matriz cuadrada se cumple que: $|A|\neq 0 \Leftrightarrow rg(A)=3$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0\Rightarrow rg(A)=3$$

2.- Se sabe que el precio de un bien es función de la cantidad producida del mismo, x, según la siguiente relación: $p(x)=40-\frac{1}{4}x$ y que su función de costes es $C(x)=4x^2-64x+500$.

a) Determinar el nivel de producción que maximiza el ingreso total: $I(x)=x\cdot p(x)$.

¿Cuál es el ingreso total máximo? (2 puntos).

b) Determinar el nivel de producción que minimiza la función de costes ¿cuál es el coste mínimo? (1,5 puntos).

Solución:

a) $I(x)=x\cdot p(x)=x(40-\frac{1}{4}x)=40x-\frac{1}{4}x^2$

Para maximizar el ingreso total tenemos que calcular los puntos críticos de la función (los puntos en los que se anula la derivada):

$$I'(x)=40-\frac{1}{2}x=0\Rightarrow x=80$$

Para ver que efectivamente en $x=80$ hay un máximo vamos utilizar el criterio de la segunda derivada, es decir que $I''(x)$ sea negativa para $x=80$.

$$I''(x)=-\frac{1}{2}<0\Rightarrow \text{En } x=80 \text{ se obtiene un máximo para el ingreso total.}$$

Para obtener el ingreso total máximo se sustituye $x=80$ en la función $I(x)=40x-\frac{1}{4}x^2$

$$\Rightarrow I(80)=40\times 80-\frac{1}{4}80^2=3200-1600=1600.$$

Por lo tanto, el ingreso total máximo es 1600 unidades monetarias.

c) Para minimizar la función de costes tenemos que calcular los puntos críticos de la función (los puntos en los que se anula la derivada):

$$C'(x)=8x-64=0\Rightarrow x=\frac{64}{8}=8$$

Para ver que efectivamente en $x=8$ hay un mínimo vamos utilizar el criterio de la segunda derivada, es decir que $C''(x)$ sea positiva para $x=8$.

$C''(x) = 8 > 0 \Rightarrow$ En $x = 8$ se obtiene un mínimo para la función de costes.

Para obtener el coste mínimo se sustituye $x = 8$ en la función $C(x) = 4x^2 - 64x + 500$ $\Rightarrow C(8) = 4 \times 8^2 - 64 \times 8 + 500 = 256 - 512 + 500 = 244$.

Por lo tanto, el coste mínimo es 244 unidades monetarias.

3.- Calcular la media, la moda y desviación típica de la siguiente serie de números: 7, 6, 5, 4, 5, 6, 5, 9, 3, 6, 3, 9, 7, 6, 4, 6, 5, 9, 6, 5 (3 puntos).

Solución:

En primer lugar, vamos a ordenar los datos en una tabla de frecuencias en la que dejamos reflejadas las frecuencias absolutas y relativas, tanto ordinarias (n_i, f_i) como acumuladas (N_i, F_i):

x_i	n_i	N_i	f_i	F_i
3	2	2	2/20=0.1	2/20=0.1
4	2	4	2/20=0.1	4/20=0.2
5	5	9	5/20=0.25	9/20=0.45
6	6	15	6/20=0.3	15/20=0.75
7	2	17	2/20=0.1	17/20=0.85
9	3	20	3/20=0.15	20/20=1
TOTAL (N)	20			

Para calcular la media aplicamos la siguiente formula: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{N}$, en este caso:

$$\bar{x} = \frac{3\times2+4\times2+5\times5+6\times6+7\times2+9\times3}{20} = \frac{116}{20} = 5,8$$

Para buscar la moda, nos fijamos en la columna de las frecuencias ordinarias y el valor de mayor frecuencia corresponde al valor $x_i = 6 \Rightarrow Mo = 6$

Para calcular la desviación típica (S_X) tenemos que obtener primero la varianza (S_X^2) a partir de la fórmula:

$$S_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 n_i}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i^2 n_i}{N} - \overline{x}^2 \Rightarrow$$

$$S_X^2 = \frac{3^2 \times 2 + 4^2 \times 2 + 5^2 \times 5 + 6^2 \times 6 + 7^2 \times 2 + 9^2 \times 3}{20} - (5,8)^2 = \frac{732}{20} - (5,8)^2 = 2,96$$

Por lo tanto: $S_X = \sqrt{S_X^2} = \sqrt{2,96} = 1,7205$

OPCIÓN B

1.- Dado el programa lineal:

$$\begin{aligned} &\max\ 3x - y \\ &\textit{sujeto a} \\ &\qquad -x + 5y \le 12 \\ &\qquad 3x + 2y \ge 15 \\ &\qquad 4x - 3y \le 20 \\ &\qquad x \ge 0,\ y \ge 0 \end{aligned}$$

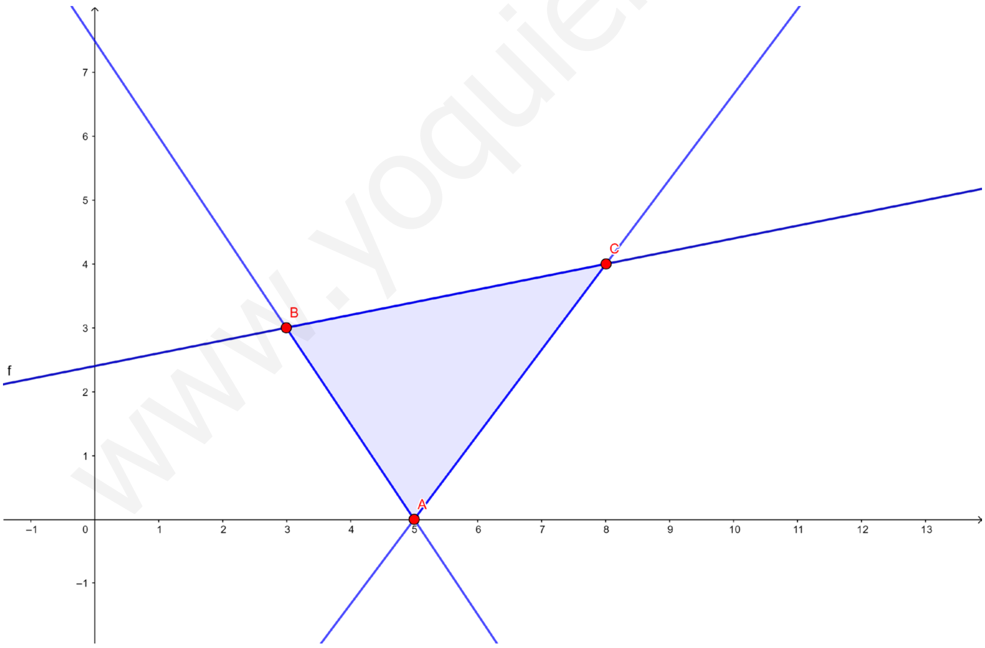
a) Representar gráficamente la región factible del programa lineal (1,5 puntos).

b) ¿Podría encontrarse el máximo en el punto (5,5)? (0,5 puntos).

c) Resolver el programa lineal (1,5 puntos).

Solución:

a) El conjunto factible es el recinto representado en azul en la figura. Los vértices de dicho recinto son los puntos: *A*(5,0), *B*(3,3), *C*(8,4)



Región factible

b) El máximo no podría encontrarse en el punto (5,5), ya que dicho punto no está en la región factible como se puede comprobar gráficamente o sustituyendo en las desigualdades que definen dicha región.

c) Para obtener el máximo de la función objetivo $z(x, y) = 3x - y$ hay que calcular los valores que toma la función en cada uno de los vértices de la región factible: $z(A) = 15;\ z(B) = 6;\ z(C) = 20$. Por lo tanto, el mínimo se alcanza en el punto $C(8,4)$ y el valor máximo que alcanza esta función en la región factible es igual a 20.

2.- Sea $f(x) = \dfrac{x}{x-5}$

a) Estudiar si la función es continua en los puntos $x = 5$ y $x = 10$ (2 puntos).

b) Calcular la derivada de la función $f(x)$ en el punto $x = 6$ (1,5 puntos).

Solución:

a) En primer lugar, vamos a obtener el dominio de definición de la función $f(x) = \dfrac{x}{x-5}$. Al ser una función racional (cociente de dos funciones polinómicas) estará definida siempre que no se anule el denominador. En este caso $x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 5$. Luego la función está definida para todo $x \in IR - \{5\}$.

Teniendo en cuenta que la función no está definida para $x = 5$ podemos concluir que en dicho punto la función no es continua.

En el punto $x = 10$ la función es continua ya que: $\begin{cases} f(10) = \dfrac{10}{10-5} = 2 \\ \lim\limits_{x\to 10} f(x) = \lim\limits_{x\to 10} \dfrac{x}{x-5} = 2 \\ f(10) = \lim\limits_{x\to 10} f(x) = 2 \end{cases}$

b) Para calcular la derivada de la función aplicamos la fórmula de la derivada de un cociente:

Si $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)} \quad \Rightarrow f'(x) = \left(g/h\right)'(x) = \dfrac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{h(x)^2}$

En este caso: $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)} = \dfrac{x}{x-5} \quad \Rightarrow f'(x) = \dfrac{(x-5) - x}{\left(x-5\right)^2} = \dfrac{-5}{\left(x-5\right)^2}$

En el punto $x = 6 \Rightarrow f'(6) = \frac{-5}{(6-5)^2} = -5$

3.- El 60 % de los alumnos de un campamento son niñas. El 50 % son niñas y mayores de 10 años y el 12 % son niños con 10 o menos años.

a) Si se escoge al azar un alumno de ese campamento ¿cuál es la probabilidad de que sea mayor de 10 años? (1,5 puntos).

b) Se ha elegido aleatoriamente un alumno y resulta que no es mayor de 10 años ¿cuál es la probabilidad de que sea niño? (1,5 puntos).

Solución:

Si denotamos por *D* el suceso "tener más de 10 años", el enunciado nos da los siguientes datos:

$P(niña) = 0,6 \Rightarrow P(niño) = 0,4$

$P(niña \cap D) = 0,5$

$P(niño \cap \bar{D}) = 0,12$

a) Si se escoge al azar un alumno del campamento, la probabilidad de que sea mayor de 10 años es:

$$P(D) = P(niña \cap D) + P(niño \cap D) = 0,5 + 0,28 = 0,78$$

ya que $P(niño \cap \bar{D}) = 0,12$ y

$P(niño) = P(niño \cap D) + P(niño \cap \bar{D}) = 0,4 \Rightarrow P(niño \cap D) = 0,4 - 0,12 = 0,28$

b) Si se sabe que el alumno no es mayor de diez años, la probabilidad de que sea niño es:

$$P(niño / \bar{D}) = \frac{P(niño \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{0,12}{0,22} = 0,5454$$

Obsérvese que $P(\bar{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0,78 = 0,22$