

EXAMEN MATEMÁTICAS II PCE MAYO 2018

PREGUNTAS DEL TEST

1. El rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Es:

Solución:

Para conocer el rango de la matriz A cálculo su determinante por la Regla de Sarrus:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 0 \cdot 0 \cdot 0 - 3 \cdot 1 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \cdot 2 - 0 \cdot 2 \cdot 2 = 4 + 6 \neq 0$$

Como $|A| \neq 0$ podemos asegurar que el $Rg(A)=3$.

2. El conjunto de soluciones del sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}$$

Define:

Solución:

El sistema está formado por dos ecuaciones de tres incógnitas, como bien sabemos el sistema será compatible indeterminado (con un único parámetro), cuya solución será:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -\alpha \\ z = \alpha \end{cases}$$

Es decir, su solución es la ecuación de una recta en paramétricas, por lo tanto la solución es una recta en el espacio.

3. El valor del límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{\log(1 + x^2)}$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{\log(1 + x^2)} = \frac{0}{0}$$

Aplico la Regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{sen} x}{\log(1 + x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x + x \cos x}{\frac{2x}{1 + x^2}} = \frac{0}{0}$$

Aplico nuevamente L'Hôpital:

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \cos x - x \operatorname{sen} x}{\frac{2(1 + x^2) - 2x \cdot 2x}{(1 + x^2)^2}} = \frac{2}{2} = 1$$

4. Las rectas:

$$r_1: \frac{x - 2}{1} = \frac{y - 3}{3} = \frac{z - 1}{1}$$

$$r_2: \frac{x - 2}{1} = \frac{y - k}{1} = \frac{z - 2}{2}$$

Se cortan en un punto para el valor de k:

Solución:

Paso r_1 a paramétricas y así obtengo el punto genérico de la recta en cuestión:

$$r_1: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + 3t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Sustituyo x e z en r_2 para obtener t :

$$\frac{(2 + t) - 2}{1} = \frac{(1 + t) - 2}{2}$$

Y despejo hasta obtener: $t = -1$. Sustituyo t en la siguiente igualdad:

$$\frac{(3 + 3t) - k}{1} = \frac{(1 + t) - 2}{2}$$

Para obtener el valor de k :

$$\frac{3 + 3(-1) - k}{1} = \frac{1 + (-1) - 2}{2}$$

$$-k = -1$$

$$k = 1$$

5. El área del triángulo cuyos vértices son los puntos $P = (1, 2, -3)$, $Q = (-2, 1, 0)$ y $O = (0, 0, 0)$ es:

Solución:

Calculo los vectores $\overrightarrow{OP} = P - O = P$ y $\overrightarrow{OQ} = Q - O = Q$.

El área de un triángulo se calcula de la siguiente forma:

$$\text{Área de un triángulo} = \frac{|\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}|}{2}$$

Lo calcularemos por separado:

$$\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - 6\vec{j} - 5\vec{k} = (-3, -6, -5)$$

Calculamos el módulo del vector que acabamos de hallar:

$$|\overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{OQ}| = \sqrt{(-3)^2 + (-6)^2 + (-5)^2} = \sqrt{9 + 36 + 25} = \sqrt{70}$$

Luego:

$$\text{Área de un triángulo} = \frac{\sqrt{70}}{2}$$

6. El coseno del ángulo θ formado por los vectores \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AC} , determinados por los puntos $A = (2, 1, 0)$, $B = (3, 0, 0)$ y $C = (4, 1, 2)$, es:

Solución:

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| * |\overrightarrow{AC}|}$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (1, -1, 0)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (2, 0, 2)$$

$$\overrightarrow{AB} * \overrightarrow{AC} = 1 \cdot 2 + 0 + 0 = 2$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

$$\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{2}\sqrt{8}} = \frac{2}{\sqrt{16}} = \frac{1}{2}$$

7. La función

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

Corta en el eje X en:

Solución:

Una función corta en el eje OX cuando $y=0$, por lo tanto igualaremos nuestra función a 0 y calcularemos el valor de x :

$$0 = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

$$0 = x^3$$

$$\sqrt[3]{0} = x$$

$$x = 0$$

Por tanto $f(x)$ corta en un único punto.

8. La gráfica de la función $f(x)$ tiene como asíntota la recta:

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

Solución:

En primer lugar veamos si tiene asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

Como no tiene asíntotas horizontales veamos si tiene asíntotas oblicuas. Si las hubiera, estas serán de la forma $y = mx + n$.

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^3 + x - 2x^2} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{(x-1)^2} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x(x-1)^2}{(x-1)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x^3 - x + 2x^2}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x + 2x^2}{(x-1)^2} = 2$$

Luego la asíntota es $y = x + 2$.

9. Sean A y B dos sucesos de un espacio muestral E, donde \bar{A} y \bar{B} denotan los sucesos contrarios. Tenemos asignadas una probabilidad en E de modo que $P(A \cap B) = 1/9$ y $P(A \cap \bar{B}) = 2/9$ entonces calcula el valor de $P(B|A)$:

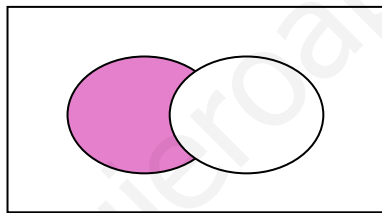
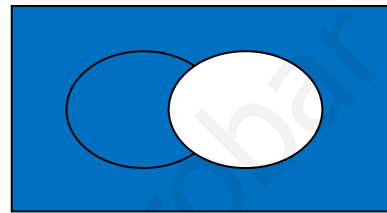
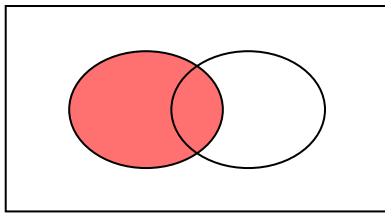
Solución:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Vamos a calcular $P(A)$.

Conocemos $P(A \cap \bar{B})$. Vamos a representarla:

A está tintada de rojo y \bar{B} de azul, por lo tanto la intersección entre ambas es:



Por lo tanto podemos decir que $P(A) = P(A \cap \bar{B}) + P(A \cap B) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} = \frac{3}{9}$.

Luego:

$$P(B|A) = \frac{1/9}{3/9} = \frac{1}{3}$$

10. La integral:

$$\int_0^{\pi/4} x \operatorname{sen} x \, dx$$

Vale:

Solución:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \operatorname{sen} x \, dx$$

Primero calcularemos al integral por partes:

$$\begin{aligned} & \int x \operatorname{sen} x \, dx \\ & u = x \quad du = dx \\ & dv = \operatorname{sen} x \, dx \quad v = -\cos x \\ & = x(-\cos x) - \int -\cos x \, dx \\ & = x(-\cos x) - (-\operatorname{sen} x) \\ & = -x \cos x + \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

Ahora:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \operatorname{sen} x \, dx &= -x \cos x + \operatorname{sen} x \Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}} \\ & \left(-\frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \right) - (-0 \cos 0 + \operatorname{sen} 0) = \\ & -\frac{\pi}{4} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

PROBLEMAS

1. Estudiar la posición relativa de los planos:

$$\begin{aligned}\pi_1: mx + z &= 1 \\ \pi_2: my - z &= 0 \\ \pi_3: (m + 1)x + y + 2z &= m + 1\end{aligned}$$

Según los valores de m .

Solución:

Planteo

$$A = \begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & m & -1 \\ m+1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} m & 0 & 1 & 1 \\ 0 & m & -1 & 0 \\ m+1 & 1 & 2 & m+1 \end{pmatrix}$$

y calcularemos su posición comparando el rango de ambas.

Para calcular $Rg(A)$ calculo su determinante:

$$|A| = 2m^2 - m(m + 1) + m = 2m^2 - m^2 = m^2$$

Así sabemos que $|A| = 0 \Leftrightarrow m^2 = 0 \Leftrightarrow m = 0$

Distingamos casos:

- Si $m \neq 0$: $Rg(A)=3=Rg(A^*)$, estamos antes un Sistema Compatible Determinado, los tres planos se cortan en un punto.

- Si $m = 0$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$Rg(A)=2$, ya que: $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$

Veamos cuánto vale $Rg(A^*)$:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - (-1) - 0 - 0 \neq 0$$

Luego $Rg(A^*)=3$.

Estamos ante un Sistema Incompatible, así que estamos ante dos planos paralelos que cortan al tercero.

2. Hallar las asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función:

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

Hacer un esbozo de la gráfica de f.

Solución.

• Asíntotas:

○ Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x - 1} \stackrel{L'Hôpital}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^x - 1} \stackrel{L'Hôpital}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} = \infty$$

○ Asíntotas verticales:

Nos planteamos las asíntotas verticales cuando el denominador se anula, es decir:

$$e^x - 1 = 0; e^x = 1; x = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} \stackrel{L'Hôpital}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x} = 1$$

Luego no hay asíntotas verticales.

○ Asíntotas oblicuas:

Dado que solamente hay asíntota horizontal cuando $x \rightarrow \infty$, estudiaremos la existencia de asíntota oblicua cuando $x \rightarrow -\infty$.

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{(e^x - 1)x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x - 1} = -1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x - 1} - mx = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x - 1} + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^x}{e^x - 1} = \frac{0}{-1} = 0$$

Luego hay asíntota oblicua en $y=-x$.

- *Crecimiento y decrecimiento:*

$$f'(x) = \frac{e^x - 1 + xe^x}{(e^x - 1)^2}$$

La derivada $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 + xe^x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

