

EXAMEN MATEMÁTICAS UNED

Convocatoria Extraordinaria. Curso 2018-2019

CUESTIONES TIPO TEST

1. La matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ verifica que $A^2 = I$ siendo I la matriz identidad, cuando:

- a) $a = 0$
- b) $a = \pm 1$**
- c) $a = \pm 2$

Calculamos:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = I \rightarrow a^2 = 1 \rightarrow a = \sqrt{1} = \pm 1$$

2. El rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ es:

- a) Uno
- b) Dos**
- c) Tres

El rango de A se calcula estudiando sus determinantes:

$$|A|_3 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-8 + 1 + 1) - (-2 - 2 - 2) = -6 - (-6) = 0 \rightarrow Rg A \neq 3$$

$$|A|_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-2) = 3 \neq 0 \rightarrow Rg A = 2$$

3. Sea A una matriz cuadrada de tamaño 3×3 . Si el determinante de A es $\det A = 3$, entonces el determinante de la matriz traspuesta A^t es:

- a) $\det(A^t) = -3$
- b) $\det(A^t) = 1/3$
- c) $\det(A^t) = 3$**

Por propiedades de los determinantes: $|A| = |A^t|$

4. El conjunto de soluciones del sistema: $\begin{cases} 3x + y = 1 \\ x - y + 2z = -3 \end{cases}$ es:

- a) $\{(\lambda, 1 - 3\lambda, -1 - 2\lambda) : \lambda \in R\}$
- b) $\{(1 - 3\lambda, \lambda, -1 - 2\lambda) : \lambda \in R\}$
- c) $\{(-1 - 2\lambda, 1 - 3\lambda, \lambda) : \lambda \in R\}$

Dado que es un sistema de 3 ecuaciones con 2 incógnitas (n° ecs. $<$ n° incógn.), se trata de un sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones).

$$\begin{cases} 3x + y = 1 \rightarrow y = 1 - 3x \\ x - y + 2z = -3 \end{cases} \rightarrow x - (1 - 3x) + 2z = -3 \rightarrow 4x + 2z = -2 \rightarrow z = -1 - 2x$$

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - 3x = 1 - 3\lambda \quad \forall \lambda \in R \\ z = -1 - 2\lambda \end{cases}$$

5. Las rectas $r: x = y - 1 = z$ y $s: \frac{x-1}{2} = y - 2 = \frac{z-2}{4}$:

- a) Son paralelas
- b) Se cortan en un punto
- c) **No son paralelas, ni se cortan en un punto**

Para saber cual es la posición relativas de las rectas r y s estudiamos la posición de sus vectores directores:

$$\begin{cases} \vec{u}_r = (1, 1, 1) \\ \vec{u}_s = (2, 1, 4) \end{cases} \rightarrow \vec{u}_r \neq \vec{u}_s$$

Como $\vec{u}_r \neq \vec{u}_s$ $\begin{cases} \text{Se cortan} \rightarrow \vec{PQ}, \vec{u}_r, \vec{u}_s \text{ pertenecen al mismo plano} \\ \text{Se cruzan} \rightarrow \vec{PQ}, \vec{u}_r, \vec{u}_s \text{ no pertenecen al mismo plano} \end{cases}$

$$\begin{cases} \text{Recta } r: P = (0, 1, 0) \\ \text{Recta } r: Q = (1, 2, 2) \end{cases} \rightarrow \vec{PQ} = (1, 2, 2) - (0, 1, 0) = (1, 1, 2)$$

$$[\vec{PQ}, \vec{u}_r, \vec{u}_s] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (4 + 2 + 2) - (4 + 1 + 4) = -1 \neq 0 \rightarrow \text{Son vectores L.I.}$$

$\vec{PQ}, \vec{u}_r, \vec{u}_s$ no pertenecen al mismo plano \rightarrow **La rectas r y s se cruzan**

6. La ecuación del plano que contiene a las rectas: $r: \frac{x+1}{2} = y = z + 1$ y $s: \frac{x-5}{2} = y - 4 = z$ es:

- a) **$3x - 4y - 2z + 1 = 0$**
- b) $x + 2y + 3z = 1$
- c) $x + 4y - z = 0$

Si estudiamos los vectores directores de las rectas observamos que son paralelas, ya que: $\vec{u}_r = \vec{u}_s$
El plano buscado tendrá las siguientes características:

$$\text{Recta } r \begin{cases} \vec{u}_r = (2, 1, 1) \\ P_r(-1, 0, -1) \end{cases} \quad \text{Recta } s \begin{cases} \vec{u}_s(2, 1, 1) \\ P_s(5, 4, 0) \end{cases} \rightarrow \text{Plano } \pi \begin{cases} P_r(-1, 0, -1) \rightarrow \text{Punto de } \pi \\ \overrightarrow{P_r P_s}(6, 4, 1) \rightarrow \text{Vect. director de } \pi \\ \vec{u}_s(2, 1, 1) \rightarrow \text{Vect. director de } \pi \end{cases}$$

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y & z+1 \\ 6 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow [4(x+1) + 6(z+1) + 2y] - [8(z+1) + (x+1) + 6y] = 0$$

$$\pi \equiv 3x - 4y - 2z + 1 = 0$$

7. La ecuación del plano que pasa por los puntos P(1, 0, 0); Q(0, 2, 0) y R(0, 0, 1) es:

- a) $2x + y + 2z = 2$
- b) $x + y + z = 2$
- c) $2x - y + 2z = 1$

Hay varias opciones para responder este ejercicio. Nosotros vamos a optar por la que consideramos más rápida.

Si los puntos pertenecen al plano, al sustituirlos en la ecuación del mismo deben cumplirla, es decir:

$$2x + y + 2z = 2 \begin{cases} P(1, 0, 0) \rightarrow 2 \cdot 1 + 0 + 2 \cdot 0 = 2 \\ Q(0, 2, 0) \rightarrow 2 \cdot 0 + 2 + 2 \cdot 0 = 2 \\ R(0, 0, 1) \rightarrow 2 \cdot 0 + 0 + 2 \cdot 1 = 2 \end{cases} \rightarrow \text{Cumplen la ecuación todos los puntos}$$

8. La distancia del punto P(4, 6, 0) al plano $\pi \equiv 2x - y + 2z + 1 = 0$

- a) 1
- b) 3
- c) 2

La distancia del punto P al plano π se calcula:

$$d(P, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \begin{cases} P(x_0, y_0, z_0) \rightarrow P = (4, 6, 0) \\ \pi \equiv ax + by + cz + d = 0 \rightarrow \pi \equiv 2x - y + 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$d(A, \pi) = \frac{|2 \cdot 4 - 6 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{|8 - 6 + 1|}{\sqrt{9}} = \frac{|3|}{3} = 1 \text{ ud}$$

9. La función $f(x) = \text{sen } x \cdot \cos x$:

- a) Es par, es decir, se verifica que $f(-x) = f(x)$
- b) Es impar, es decir, se verifica que $f(-x) = -f(x)$
- c) Es no negativa, es decir que $f(x) \geq 0 \forall x \in R$

Comprobamos:

$$\begin{cases} f(x) = \operatorname{sen} x \cdot \cos x \\ f(-x) = \operatorname{sen}(-x) \cdot \cos(-x) \\ -f(x) = -\operatorname{sen} x \cdot \cos x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x &\neq \operatorname{sen}(-x) \text{ y } \cos(x) = \cos(-x) \rightarrow f(x) \neq f(-x) \\ -\operatorname{sen} x &= \operatorname{sen}(-x) \text{ y } \cos(x) = \cos(-x) \rightarrow -f(x) \neq f(-x) \end{aligned}$$

10. La función:

$$f(x) \begin{cases} \frac{x}{\ln x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ (x^2 + 1) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

- a) Es continua en $x = 0$
- b) Los límites laterales en $x = 0$ son finitos pero distintos**
- c) Uno de los límites laterales en $x = 0$ es infinito

Para que una función sea continua en un punto:

- La función tiene que existir en ese punto.
- Los límites laterales en ese punto tienen que existir y ser iguales.
- Ambos valores (función en el punto y límite en el punto) tienen que coincidir.

Comprobamos la continuidad de la función en $x = 0$.

$$\text{➤ } \forall x = 0 \rightarrow y = f(0) = 0 \rightarrow \exists f(x) \text{ en } x = 0$$

$$\text{➤ } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln x} = \frac{0}{0} \rightarrow LH \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + 1) = 0 + 1 = 1 \end{cases} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$$

Es decir, la función no es continua en $x = 0$.

Respuestas correctas: 1b), 2b), 3c), 4a), 5c), 6a), 7a), 8a), 9b), 10b).

PROBLEMAS

1. Dada la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x}{9 - x^2}$$

- Calcular el dominio y el conjunto de puntos donde la función es continua.
- Estudiar si tiene asíntotas.
- Estudiar el crecimiento y los extremos relativos.
- Haga un dibujo aproximado de la gráfica.

a)

La función no existe cuando el denominador se anula, es decir:

$$f(x) = \frac{x}{9 - x^2} \rightarrow 9 - x^2 = 3^2 - x^2 = 0 \rightarrow (3 - x)(3 + x) = 0 \begin{cases} x = 3 \\ x = -3 \end{cases}$$

$$D = R - \{-3, 3\} = (-\infty, -3) \cup (-3, 3) \cup (3, +\infty)$$

Solución: La función es continua en todo el conjunto de los números reales menos en los puntos $x = -3$ y $x = 3$.

b)

Estudiamos la existencia de asíntotas en la función:

➤ Asíntotas verticales:

Como hemos estudiado en el apartado anterior, la función es continua en todos los números reales excepto en $x = -3$ y en $x = 3$. Estudiamos si hay asíntotas verticales en dichos puntos.

$$A.V. \text{ en } x = 3 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \pm\infty \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x}{9 - x^2} = \frac{3,000 \dots 1}{9 - 3,000 \dots 1^2} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x}{9 - x^2} = \frac{2,999 \dots 9}{9 - 2,999 \dots 9^2} = +\infty \end{cases}$$

$$A.V. \text{ en } x = -3 \rightarrow \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \pm\infty \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x}{9 - x^2} = \frac{-2,999 \dots 9}{9 - (-2,999 \dots 9)^2} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x}{9 - x^2} = \frac{-3,000 \dots 1}{9 - (-3,000 \dots 1)^2} = +\infty \end{cases}$$

Conclusión: Hay asíntotas verticales en $x = 3$ y en $x = -3$.

➤ Asíntotas horizontales:

Para que la función tenga asíntotas horizontales tiene que existir su límite cuando 'x' tiende a infinito y ser un número:

$$y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0 \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{9-x^2} = 0^+ \rightarrow \text{Jerarquía de infinitos } (\infty^2 > \infty) \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{9-x^2} = 0^- \rightarrow \text{Jerarquía de infinitos } (\infty^2 > \infty) \end{cases}$$

Conclusión: Hay una asíntota horizontal en $y = 0$.

NOTA: Cuando hay A. H. no hay asíntotas oblicuas.

c)

Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento necesitamos establecer unos intervalos de estudio. Para ello tenemos en cuenta:

- Dominio de la función: $D = R - \{-3, 3\}$
- Puntos críticos: Máximos y mínimos $\rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow$ *No hay ni máximos ni mínimos relativos*

$$f(x) = \frac{x}{9-x^2} \rightarrow f'(x) = \frac{1 \cdot (9-x^2) - x \cdot (0-2x)}{(9-x^2)^2} = \frac{9+x^2}{(9-x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{9+x^2}{(9-x^2)^2} \rightarrow f'(x) = 0 \rightarrow f'(x) = \frac{9+x^2}{(9-x^2)^2} = 0 \rightarrow 9+x^2 = 0 \rightarrow \text{No tiene solución}$$

- Puntos críticos: Puntos de inflexión $\rightarrow f''(x) = 0 \rightarrow$ *Hay un P. I. en $x = 0$*

$$f'(x) = \frac{9+x^2}{(9-x^2)^2} \rightarrow f''(x) = \frac{(0+2x) \cdot (9-x^2)^2 - (9+x^2) \cdot 2(9-x^2) \cdot (0-2x)}{(9-x^2)^4}$$

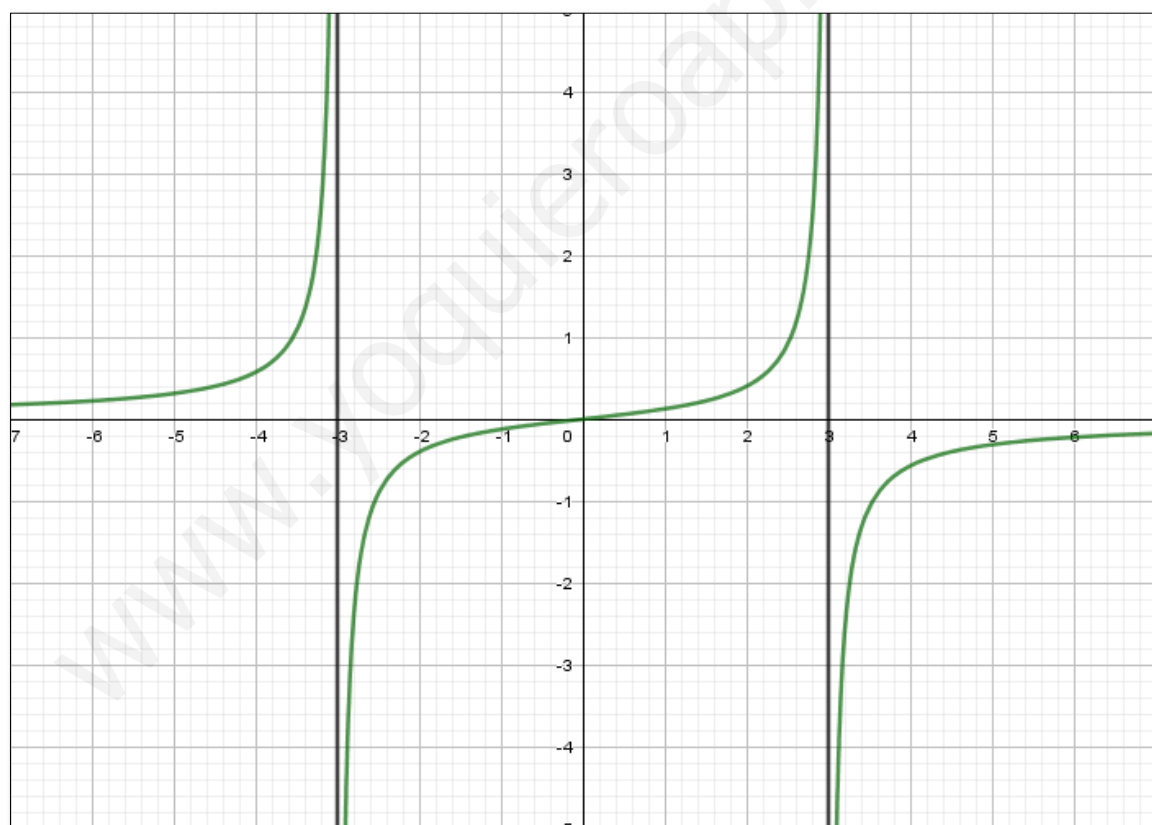
$$f''(x) = \frac{2x \cdot (27+x^2)}{(9-x^2)^3} \rightarrow f''(x) = 0 \rightarrow f'(x) = \frac{2x \cdot (27+x^2)}{(9-x^2)^3} = 0 \rightarrow 2x \cdot (27+x^2) = 0$$

$$2x \cdot (27+x^2) = 0 \begin{cases} 2x = 0 \rightarrow x = 0 \\ 27+x^2 = 0 \rightarrow \text{No tiene solución} \end{cases}$$

Con los datos anteriores establecemos los siguientes intervalos:

$(-\infty, -3)$	$f'(x) = +/+ > 0$	La función es creciente es este intervalo
$(-3, 0)$	$f'(x) = +/+ > 0$	La función es creciente es este intervalo
$(0, 3)$	$f'(x) = +/+ > 0$	La función es creciente es este intervalo
$(3, +\infty)$	$f'(x) = +/+ > 0$	La función es creciente es este intervalo

d)



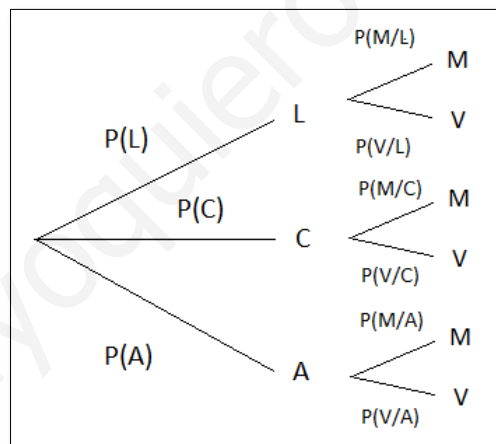
2. En la Universidad de Guadamonte hay tres facultades: de letras, de ciencias y de artes. El 60% de los estudiantes son de letras, y los de ciencias son el 30%. Si las mujeres de letras suponen el 50%, en ciencias el 60% y en arte el 70%:
- Dibuje un diagrama en árbol (o árbol de probabilidad) que recoja las probabilidades de los sucesos descritos.
 - Calcule cual es la probabilidad de que un estudiante escogido al azar sea varón.
 - Si la presidenta de la asociación de estudiantes es mujer, calcule la probabilidad de que sea de letras.

a)

Inicialmente definimos los sucesos:

- Suceso L: Estudiantes que son de letras.
- Suceso C: Estudiantes que son de ciencias.
- Suceso A: Estudiantes que son de artes.
- Suceso M: Estudiantes mujeres.
- Suceso V: Estudiantes varones.

Elaboramos un diagrama en árbol para visualizar la información aportada en el enunciado:



Sabemos que:

- El 60 % de los estudiantes son de letras, es decir: $P(L) = 0,6$
- El 30 % de los estudiantes son de ciencias, es decir: $P(C) = 0,3$
- Es decir, que el resto de estudiantes (10 %) son de artes: $P(A) = 1 - P(L) - P(C) = 0,1$
- El 50 % de las mujeres son de letras, es decir: $P(M/L) = 0,5$
- Es decir, que el resto de estudiantes de letras (50 %) son varones: $P(V/L) = 1 - P(M/L) = 0,5$
- El 60 % de las mujeres son de ciencias, es decir: $P(M/C) = 0,6$
- Es decir, que el resto de estudiantes de ciencias (40 %) son varones: $P(V/C) = 1 - P(M/C) = 0,4$
- El 70 % de las mujeres son de artes, es decir: $P(M/A) = 0,7$
- Es decir, que el resto de estudiantes de artes (30 %) son varones: $P(V/A) = 1 - P(M/A) = 0,3$

b)

La probabilidad de que un estudiante escogido al azar sea varón es:

$$P(V) = P(C) \cdot P(V/C) + P(L) \cdot P(V/L) + P(A) \cdot P(V/A) = 0,3 \cdot 0,4 + 0,6 \cdot 0,5 + 0,1 \cdot 0,3 = 0,45 = \mathbf{45\%}$$

c)

Sabiendo que la presidenta de la asociación de estudiantes es mujer, la probabilidad de que sea de letras se calcula aplicando el Teorema de Bayes.

$$P(L/M) = \frac{P(L \cap M)}{P(M)} = \frac{P(L) \cdot P(M/L)}{P(M)} = \frac{0,6 \cdot 0,5}{0,55} = 0,54 = \mathbf{54,5\%}$$

$$P(M) = 1 - P(V) = 1 - 0,45 = 0,55$$

www.yoquieroaprobar.es