UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

Prueba de Competencia Específica. Matemáticas. Curso 2019/20.

PRIMERA PARTE: PREGUNTAS TIPO TEST — Modelo 3

Responda un máximo de 10 de las siguientes preguntas tipo test porque solo se corregirán las diez primeras respuestas

1- El sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rrrl} 3x & +y & & =1 \\ x & -y & +2z & =-2 \\ 5x & +y & +2z & =4 \end{array}\right.$$

a) tiene una única solución
b) no tiene solución
c) tiene infinitas soluciones

2- El rango de la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

es:
a) uno
b) dos
c) tres

3- La matriz $A=\begin{pmatrix} 3 & m & 0 \\ m & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **no** es invertible cuando:
a) $m=\pm 1$
b) $m=0$
c) $m=\pm 3$

4- Dadas las matrices

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

la matriz $A-BC$ es:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

5- Si A es la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

entonces la ecuación matricial $A^2-aI=O$, siendo I y O las matrices identidad y nula de orden 2×2 respectivamente, se verifica:

a) para todo valor de a
b) solo si $a=2$ ó $a=1/2$
c) solo si $a=1$ ó $a=2/3$

6- El conjunto de soluciones del sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrrl} x & +y & & =1 \\ x & -y & +2z & =-3 \end{array}\right.$$

es:
a) $\{(\lambda, 1-\lambda, -1-\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$

b) $\{(1-\lambda, \lambda, -1-2\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$

c) $\{(-1-2\lambda, 1-3\lambda, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$

7- Sea A una matriz cuadrada de tamaño 3×3. Si el determinante de A es $\det A=3$ entonces el determinante de la matriz inversa A^{-1} es:

a) $\det(A^{-1})=-3$
b) $\det(A^{-1})=1/3$
c) $\det(A^{-1})=3$

8- Los vectores $\overrightarrow{v_1}=(2,-1,0), \overrightarrow{v_2}=(1,2,1)$ y $\overrightarrow{v_3}=(3,1,1)$ son:

a) base de $\mathbb{R}^3$
b) linealmente independientes
c) linealmente dependientes

9- Sean A y B dos sucesos independientes de un experimento aleatorio cuyas probabilidades son: $P(A) = 0,6$ y $P(B) = 0,2$. Entonces la probabilidad de $\overline{A} \cup \overline{B}$, siendo $\overline{A}$ y $\overline{B}$ los sucesos contrarios de A y B respectivamente, es:

a) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,88$

b) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1,2$

c) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 0,6$

10- En una bolsa hay 200 bolas con los números del 1 al 200. Se saca una bola al azar. La probabilidad de que su número sea múltiplo de 5 es:

a) $\frac{2}{5}$

b) $\frac{1}{5}$

c) $\frac{6}{5}$

11 - En una empresa de pinturas disponen de cinco colores básicos y forman con ellos más colores combinándolos a partes iguales de dos en dos, de tres en tres, de cuatro en cuatro y los cinco juntos. ¿Cuántos colores distintos, contando los cinco primeros, tendrá la fábrica en total?

a) 20
b) 16
c) 31

12- Si el 58 % de la población española mayor de 18 años es de sexo femenino y entre la población de esa edad se sabe que el 24 % son mujeres que fuman, ¿cúal es la probabilidad de que escogida una mujer al azar mayor de 18 años sea fumadora?

a) 0,24
b) 0,41
c) 0,29

13- Se lanza una moneda no trucada cuatro veces. ¿Cúal es la probabilidad de sacar al menos dos caras?

a) $\frac{11}{16}$

b) $\frac{5}{8}$

c) $\frac{1}{4}$

14- Se lanzan tres dados iguales de seis caras, que tienen dibujados en cada cara un número del 1 al 6. ¿Cúal es la probabilidad de sacar 17 puntos o más?

a) $\frac{1}{108}$

b) $\frac{1}{216}$

c) $\frac{1}{54}$

15- Con los dígitos $2, 4, 6$ y 8, ¿cuántos números distintos de tres cifras se pueden formar si no pueden tener dígitos repetidos?

a) 24
b) 12
c) 20

①

$$\overbrace{\begin{matrix}3 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ 5 & 1 & 2\end{matrix}}^{A}\left(\begin{array}{ccc|c} & & & 1\\ & & & -2\\ & & & 4\end{array}\right)$$

$$\underbrace{\left(\begin{array}{ccc|c}3 & 1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 2 & -2\\ 5 & 1 & 2 & 4\end{array}\right)}_{A^*}$$

$$|A| = \begin{vmatrix}3 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ 5 & 1 & 2\end{vmatrix} = -4 \neq 0 \rightarrow rg\,A = 3 = rg\,A^* \rightarrow \underline{\underline{SCD}}$$

1 única sol.

②.

$$\begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\ -2 & 4 & -1\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix} \neq 0 \longrightarrow |A|_{3\times3} \neq 0 \rightarrow rg\,A = 3$$

③

$$\exists A^{-1} \longleftrightarrow |A| \neq 0$$

$$\left|\begin{matrix}3 & m & 0\\ m & 1 & -2\\ 0 & 1 & 1\end{matrix}\right|\begin{matrix}3 & m\\ m & 1\\ 0 & 1\end{matrix}\Bigg| = 0 \rightarrow 3 - m^2 + 6 = 0 \rightarrow m = \pm\sqrt{9} \begin{cases} m = 3\\ m = -3\end{cases}$$

④

$$B \times C = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & -1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$A - BC = \begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ -2 & 3\end{pmatrix}$$

⑤

$$A = \begin{pmatrix}0 & 1\\ a & 0\end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad 0 = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$A^2 - aI = 0 \longrightarrow A \cdot A - a \cdot I = 0$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix}0 & 1\\ a & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0 & 1\\ a & 0\end{pmatrix}} - \underbrace{a \cdot \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}} = 0$$

$$\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

Para cualquier valor de a será nula.

6.

$\rightarrow \boxed{x=\lambda}$

$\rightarrow \lambda+y=1 \rightarrow \boxed{y=1-\lambda}$

$\rightarrow \lambda-(1-\lambda)+2z=-3$

$$z=\frac{-3+1-2\lambda}{2}$$

$$z=\frac{-2-2\lambda}{2}=\boxed{-1-\lambda}$$

7.

$|A|=3$

$$A^{-1}=\frac{1}{A} \longleftrightarrow |A^{-1}|=\frac{1}{|A|}=\boxed{\frac{1}{3}}$$

8.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}=0 \rightarrow rg A=2$$

rango → Nº filas lin. indep.

9.

Ley de Morgan

$P(\bar{A}\cup\bar{B})=1-P(A\cap B)$

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$

$=0'6\cdot 0'2=0'12$

$=1-0'12=\boxed{0'88}$

10.

$$\frac{40 \text{ múltiplos de } 5}{200}=\boxed{\frac{1}{5}}=0'2$$

11.

Nº combinatorios

$$\binom{5}{2}+\binom{5}{3}+\binom{5}{4}+\binom{5}{5}+\binom{5}{1}=31$$

calculadora $\boxed{5}$ $\boxed{ncr}$ $\boxed{2}$ $=10$

12

	Mujeres	>18años
Fuman	0'24	P(X)
No Fuman		
tot	0'58	

$0'58x = 0'24 \longrightarrow x = \frac{0'24}{0'58} = \boxed{0'41}$

13

$$\boxed{P(\overset{\text{éxito}}{x} = k) = \binom{n \leftarrow \text{muestra}}{k} \cdot \underset{\text{prob. éxito}}{p^k} \cdot \underbrace{(1-p)}_{q = \text{fracaso}}{}^{n-k}}$$

$P(x \geq 2) = P(x=2) + P(x=3) + P(x=4) = 0'6875 = \boxed{\frac{11}{16}}$

$n=4$, $p=0'5$, $q=0'5$

$P(x=2) = \binom{4}{2} \cdot 0'5^2 \cdot (0'5)^2 = 0'375$

$P(x=3) = \binom{4}{3} \cdot 0'5^3 \cdot 0'5 = 0'25$

$P(x=4) = \cancel{\binom{4}{4}}^{1} \cdot 0'5^4 \cdot \cancel{0'5^0}^{1} = 0'0625$

14.

$6^3 = 216 \rightarrow$ total casos favor.

$\boxed{5} - \boxed{6} - \boxed{6} = 17$

$\boxed{6} - \boxed{5} - \boxed{6} = 17$

$\boxed{6} - \boxed{6} - \boxed{5} = 17$

$\boxed{6} - \boxed{6} - \boxed{6} = 18$

$\frac{4 \text{ comb.}}{216} = \frac{1}{64}$

15

$V_{3}^{4} = 4 \times 3 \times 2 = \boxed{24}$

N^o

Elija uno, y solo uno, de los dos siguientes problemas. En caso de responder parcial o totalmente a los dos problemas solo se corregirá el problema 1. Si no quiere que se corrija el problema 1 táchelo.

Problema 1

Calcule las siguientes integrales:

a) (1 punto)

$$\int \frac{2x+1}{x^2+4}dx$$

b) (0,75 puntos)

$$\int \frac{x}{(3x^2+1)^6}dx$$

c) (0,75 puntos)

$$\int \frac{e^x \operatorname{sen}(e^x)}{3}dx$$

Problema 2

Dada la siguiente función:

$$f(x) = \frac{1}{x^2+x-2}$$

a) (0,25 puntos) Describa el conjunto de puntos donde la funcion es continua.

b) (0,75 puntos) Estudie si tiene asíntotas y en caso afirmativo calcule sus ecuaciones.

c) (0,75 puntos) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función y en caso de existir calcule los extremos relativos.

d) (0,75 puntos) Haga un dibujo aproximado de la gráfica de f.

Elija uno, y solo uno, de los dos siguientes problemas. En caso de responder parcial o totalmente a los dos problemas solo se corregirá el problema 1. Si no quiere que se corrija el problema 1 táchelo.

Problema 1

Dado el plano $\pi : y - z = 0$

a) (0,5 puntos) Calcule la distancia del punto $S(0,0,1)$ al plano π.

b) (1,5 puntos) Calcule el punto S' simétrico de S respecto a π.

c) (0,5 puntos) Determine cuál es la posición relativa entre el plano π y la recta:

$$\left\{ \begin{array}{llll} 4x & -y & -z & = 3 \\ 2x & & -z & = 1 \end{array} \right.$$

Problema 2

Dada la recta

$$r : \left\{ \begin{array}{c} x - y = 1 \\ z = 1 \end{array} \right.$$

a) (1 punto) Estudie cuál es la posición relativa de la recta r y la recta:

$$s : \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{2}$$

b) (0,5 puntos) Calcule el coseno del ángulo que forman las rectas r y s

c) (1 punto) Calcule la ecuación del plano que es perpendicular a r y pasa por el punto $A(1,2,3)$.

Problema 1

① $\rightarrow \displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+4}\,dx = \int \frac{2x}{x^2+4}\,dx + \int \frac{1}{x^2+4}\,dx$

$$\left.\begin{aligned} &\rightarrow \int \frac{2x}{x^2+4}\,dx = Ln|x^2+4| + \\ &\rightarrow \int \frac{1}{x^2+4}\,dx = \frac{1}{4}\cdot 2\int \frac{1/2}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} \end{aligned}\right\} = \boxed{Ln|x^2+4| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C}$$

② $\rightarrow \displaystyle\int \frac{x}{(3x^2+1)^6}\,dx = \int \overset{u'}{x}\cdot \overset{u}{\overbrace{(3x^2+1)}}^{-6}\,dx = \frac{1}{6}\int 6x\cdot(3x^2+1)^{-6}\,dx = \frac{(3x^2+1)^{-5}}{30} + C$

$$= \boxed{\frac{1}{30(3x^2+1)^5} + C}$$

③ $\rightarrow \displaystyle\int \frac{e^x\cdot sen\, e^x}{3}\,dx = \frac{1}{3}\int e^x\cdot sen\, e^x\,dx \rightarrow t = e^x \rightarrow dt = e^x\,dx \rightarrow dx = \frac{dt}{e^x}$, $e^x = t$

$$= \frac{1}{3}\int \cancel{t}\cdot sen\,t\cdot\frac{dt}{\cancel{t}} = \frac{1}{3}\int sen\,t\,dt = -\frac{1}{3}\cos t + C \xrightarrow{t=e^x} \boxed{\frac{-\cos e^x}{3} + C}$$

Problema 2

$$f(x) = \frac{x^2+x-2}{1}$$

a) $x^2+x-2=0 \;<\; \begin{matrix} x=1 \\ x=-2 \end{matrix} \;\longrightarrow\; \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} \sim \{-2, 1\}$

La función es continua en todo su dominio.

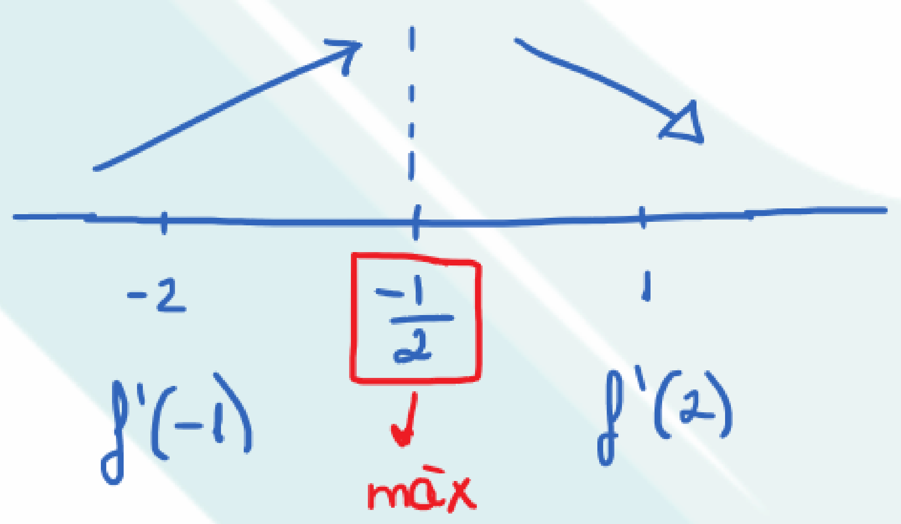
b) $\boxed{A.V}$ $\exists$ A.V en $x=-2$, $x=1$

$\boxed{A.H}$ $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^2+x-2} = 0 \longrightarrow \exists$ A.H en $y=0$

$\boxed{A.O}$ $\nexists$ A.O

c) $f'(x)=0 \rightarrow$ Ptos relativos

$$f'(x) = \frac{-2x-1}{(x^2+x-2)^2} = 0 \longrightarrow -2x=1 \longrightarrow x = \frac{-1}{2}$$



$f'(-1) = \oplus$

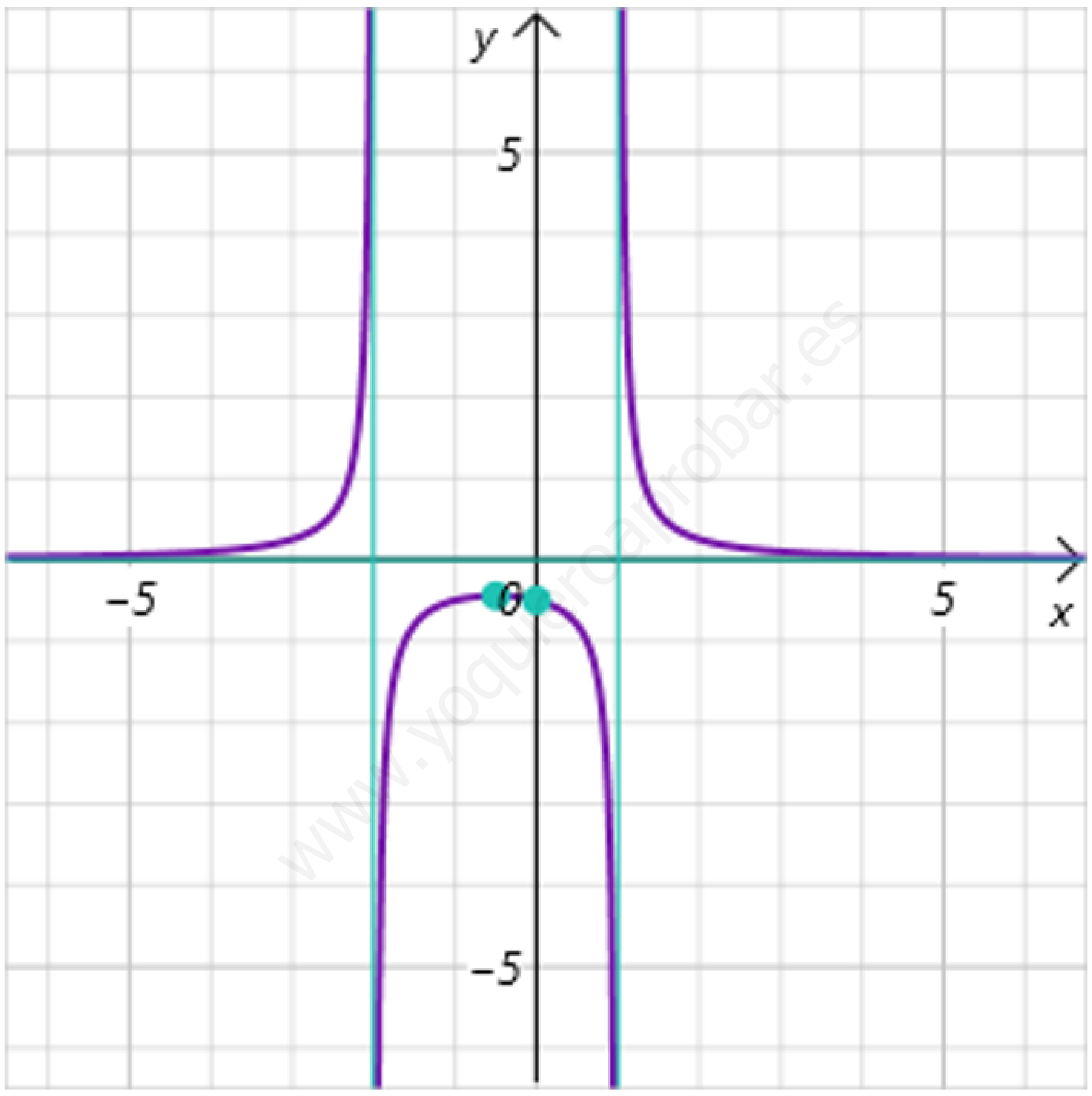
$f'(2) = \ominus$

La función es creciente $(-\infty, -2) \cup \left(-2, \frac{-1}{2}\right)$

" " es decreciente $\left(\frac{-1}{2}, 1\right) \cup (1, +\infty)$

$P_{máx} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{4}{9}\right)$

d)



Problema 3

a) $d(S,\pi)$

$\pi: y - z = \overset{D}{0}$

$S(0,0,1)$

$$d(P,\pi) = \frac{|AP_x + BP_y + CP_z + D|}{\underbrace{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}_{|\vec{n}|}}$$

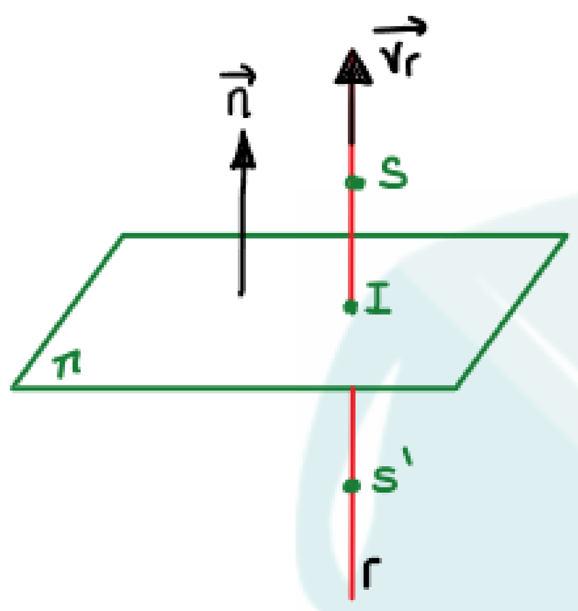
→ valor absoluto

↳ $|\vec{n}|$ ↳ módulo $\vec{n}$

$S=(\underset{x}{0},\underset{y}{0},\underset{z}{1})$, $\vec{n}=(\underset{A}{0},\underset{B}{1},\underset{C}{-1})$

$$d(S,\pi) = \frac{0\cdot 0 + 1\cdot 0 + 1\cdot(-1) + 0}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}} = \boxed{\frac{-1}{\sqrt{2}}\ u.}$$

b) S' de S respecto a $\pi: \overset{B}{y} - \overset{C}{z} = \overset{D}{0}$; $S(0,0,1)$



$$\left.\begin{array}{l} \vec{n} = \vec{v_r} = (0,1,-1) \\ r = \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 1-\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \xrightarrow{r \cap \pi}$$

$A\cdot x + B\cdot y + C\cdot z + D = 0$

$0 + \lambda - (1-\lambda) = 0$

$\Rightarrow \lambda - 1 + \lambda = 0 \rightarrow \lambda = \frac{1}{2}$

$$I = \begin{cases} x = 0 \\ y = 1/2 \\ z = 1 - 1/2 \end{cases} \longrightarrow I = (0, 1/2, 1/2)$$

→ I es el pto medio entre $S-S'$, por tanto: $I = \frac{S+S'}{2} \rightarrow \boxed{S' = 2I - S}$

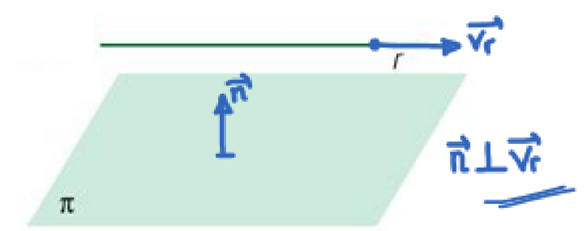
$S' = 2(0, 1/2, 1/2) - (0,0,1) = (0,1,1) - (0,0,1) = \boxed{(0,1,0)}$

c) Posición relativa entre r y π

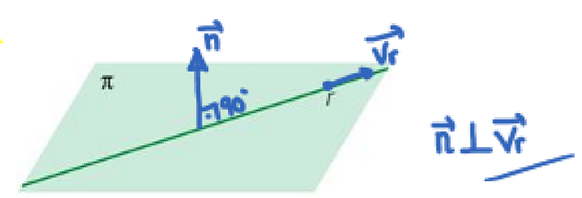
$$r \equiv \begin{cases} 4x - y - z = 3 \\ 2x \quad\ \ - z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} \cdot\ x = \lambda \rightarrow z = 2\lambda - 1 \\ \cdot\ y = 4\lambda - (2\lambda - 1) - 3 \end{array} \rightarrow r = \begin{cases} x = \lambda \\ y = -2 + 2\lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \rightarrow \begin{array}{l} P_r = (0,-2,-1) \\ \vec{v_r} = (1,2,2) \end{array}$$

$\pi: y - z = 0 \rightarrow \vec{n} = (0,1,-1)$

$\vec{v_r} \cdot \vec{n} = (1,2,2)\cdot(0,1,-1) = 0$ → r y π paralelos — SI ($\nexists$ sol.)



→ r y π contenidos — SCI (∞ sol.)



→ Descartamos: $P_r \in \pi \rightarrow 0 + (-2)\cdot 1 - 1\cdot(-1) = 0$

$-1 \neq 0 \rightarrow$ No cumple la igualdad por tanto NO SON CONTENIDOS.

r y π son paralelos.

otro método (por rangos)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow rg\,A = 2$$

$$|A^*| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \longrightarrow rg\,A^* = 3$$

SI = paralelos

No existen ptos en común.

Problema 4

a) Pos. relativa entre r y s.

$$r = \begin{cases} x - y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{array}{l} P_r = (1, 0, 1) \\ \vec{v_r} = (1, 1, 0) \end{array}$$

$$s: \frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{2} \longrightarrow \begin{array}{l} P_s = (-1, -2, 1) \\ \vec{v_s} = (2, -1, 2) \end{array}$$

- $\dfrac{\vec{v_r}}{\vec{v_s}} \Rightarrow \dfrac{1}{2} \neq \dfrac{1}{-1} \neq \dfrac{0}{2}$ → secantes / cruzan

- $\overrightarrow{P_rP_s} = P_s - P_r = (-2, -2, 0)$

$$\begin{array}{c} \vec{v_r} \\ \vec{v_s} \\ \overrightarrow{P_rP_s} \end{array} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} \longrightarrow F_1 = F_3 = |A| = 0 \longrightarrow r \text{ y } s \text{ son secantes}$$

b) cos α de r y s

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{v_r}\cdot\vec{v_s}|}{|\vec{v_r}|\cdot|\vec{v_s}|} \rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot 3} \longrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{3\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{6}}$$

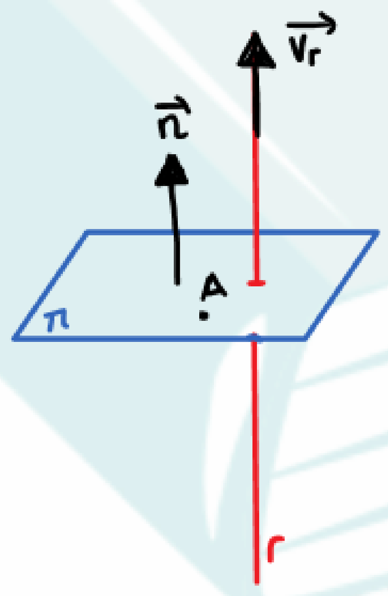
$\alpha = 76'37°$ ⟶ No piden el ángulo, solo el coseno.

c)

$\pi \perp r$

$A \in \pi$

$A = (\overset{x}{1}, \overset{y}{2}, \overset{z}{3})$



$\vec{n} = \vec{v_r}$

$\pi: Ax + By + Cz + D = 0$

$1\cdot 1 + 1\cdot 2 + 0\cdot 3 + D = 0$

$D = -3$

$\boxed{\pi = x + y - 3 = 0}$

$$r = \begin{cases} x - y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} y = \lambda \\ x = 1 + \lambda \\ z = 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} P_r = (1, 0, 1) \\ \vec{v_r} = (\underset{A}{1}, \underset{B}{1}, \underset{C}{0}) = \vec{n} \end{array}$$