# Modelo 1 test

PREGUNTAS TIPO TEST _modelo 1

1. Sea el polinomio p(x) = $\begin{vmatrix} x^2 & x^2 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}$ (determinante). Entonces

a) $p(a) = 0$ para algún valor $a > 0$.
b) El grado de p(x) es menor que 4.
c) Ninguna de las otras dos.

2. Sea la matriz $B = A^4$, donde $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $b_{3,1}$ el número de la tercera fila y la primera columna de B. Entonces:

a) $b_{3,1}$ es un número par.
b) $b_{3,1} > 10$.
c) Ninguna de las otras dos.

3. Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$S \equiv \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}z = 1 \\ 3x - y + z = 2 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + z = 3 \end{cases}$$

Entonces la solución cumple:

a) $x < z$
b) $y > x + z$
c) Ninguna de las otras dos.

4. Sea el rombo ABCD de vértices A = (3,2,1), B= (4,5,2), C= (3,8,3) y D= (a,b,c). Entonces:

a) $a > c$
b) $b > c$
c) Ninguna de las otras dos.

5. Sea s la recta que pasa por los puntos A= (0,1,1) y B= (1,0,2) y d la distancia del punto Q = (0,3,0) a la recta s. Entonces

a) $d < 1$
b) $d > 2$
c) Ninguna de las otras dos.

6. Sea el plano $\pi$ determinado por los puntos A =(0,1,1), B= (1,0,2) y C =(1,3,1). Entonces

a) el plano $2x + y + z - 2 = 0$ es perpendicular a $\pi$.
b) el plano $3x + y + 7z = 10$ es perpendicular a $\pi$.
c) Ninguna de las otras dos.

7. Sea la recta r determinada por los puntos A = (0,1,1) y B = (1,0,2), y la recta s determinada por los puntos C = (1,0,1) y D = (1,-2,0). Entonces

a) r y s se cruzan.
b) r y s se cortan en un punto.
c) Ninguna de las otras dos.

8. Sea la función f (x) = $\frac{x^2+3x+2}{\sqrt[3]{x^6+3}}$ (raíz cúbica). Entonces
a) La recta y −2 = 0 es una recta asíntota de la gráfica de f.
b) La recta 2y + 1 = 0 es una recta asíntota de la gráfica de f.
c) Ninguna de las otras dos.

9. Sea la función f (x) = $\cos\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ . Entonces

a) f'(0) = 0 y f ''(0) < 0.
b) f'(0) > 0 y f ''(0) < 1.
c) Ninguna de las otras dos.

10. Sea K = $\int_0^1 \frac{x-1}{x^2+1}dx$ . Entonces

a) k > ln2. (logaritmo neperiano)
b) k < 1/2 ln2.
c) Ninguna de las otras dos.

11. Sea la función f (x) = $\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-1}$ D su dominio o campo de existencia y k = $\lim_{x\to\infty} f(x)$ . Entonces

a) k= 1
b) $D=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$
c) Ninguna de las otras dos.

12. De una urna con 10 bolas blancas, 6 bolas negras y 4 bolas rojas, se extraen dos bolas una tras otra sin introducir la primera. Sea p la probabilidad de extraer dos bolas blancas, q la probabilidad de extraer dos bolas negras y r la probabilidad de extraer dos bolas rojas. Entonces

a) q= 3/38 y r= 3/95.
b) p= 28/153 y r=5/51.
c) Ninguna de las otras dos.

13. Se considera que la probabilidad de que al nacer un perro, este sea macho, es 0,40. Sea p la probabilidad de que haya al menos un macho entre los 5 cachorros de una camada. Entonces

a) p < 0,8.
b) p > 0,9.
c) Ninguna de las otras dos.

14. De una baraja de 40 cartas se saca una carta y se deja descubierta, y se sacan otras dos

tapadas. Sea $p$ la probabilidad de que se tenga un trío (tres cartas de igual numeración o tres figuras), sabiendo que en la primera carta que se obtuvo es un caballo. Entonces

a) $p < 1/250$
b) $p > 1/200$
c) Ninguna de las otras dos.

15. Se sabe que la probabilidad de que una semilla de sandía germine es 0,4. Se plantan 10 semillas de sandía. Sea $p$ la probabilidad de que germinen sólo 6 de las 10 semillas plantadas. Entonces

a) $p < 0{,}1$.
b) $p > 0{,}3$.
c) Ninguna de las otras dos.

# Problemas Modelo 1

**PROBLEMA 1.**

Sea la matriz **C= A² – 4A – 6B**, donde

$$= \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Estudie el **rango de C** en función del valor del número real **a**.

$$C = \overline{A^2-4A}-6B$$

- $4A = \begin{pmatrix} 4a & 0 & 4a \\ 0 & 4 & 0 \\ 4a & 0 & 4a \end{pmatrix}$

- $6B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 6 \end{pmatrix}$

- $A^2 = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ a & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a^2 & 0 & 2a^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2a^2 & 0 & 2a^2 \end{pmatrix}$

$$A^2-4A = \begin{pmatrix} 2a^2 & 0 & 2a^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2a^2 & 0 & 2a^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4a & 0 & 4a \\ 0 & 4 & 0 \\ 4a & 0 & 4a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a^2-4a & 0 & 2a^2-4a \\ 0 & -3 & 0 \\ 2a^2-4a & 0 & 2a^2-4a \end{pmatrix}$$

$$(A^2-4A)-6B = \begin{pmatrix} 2a^2-4a & 0 & 2a^2-4a \\ 0 & -3 & 0 \\ 2a^2-4a & 0 & 2a^2-4a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a^2-4a-6 & 0 & 2a^2-4a-6 \\ 0 & -9 & 0 \\ 2a^2-4a-6 & 0 & 2a^2-4a-6 \end{pmatrix} = C$$

$$|C| = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2a^2-4a-6 & 0 & 2a^2-4a-6 & 2a^2-4a-6 & 0 \\ 0 & -9 & 0 & 0 & -9 \\ 2a^2-4a-6 & 0 & 2a^2-4a-6 & 2a^2-4a-6 & 0 \end{array}\right| = -9(2a^2-4a-6)(2a^2-4a-6) - [-9(2a^2-4a-6)(2a^2-4a-6)] = 0$$

(no existen valores de a)

- $rg=3 \rightarrow |C|_{3x3} \neq 0 \rightarrow$ para todos los valores de $a$, $\nexists$ $rg=3$

- $\begin{vmatrix} 2a^2-4a-6 & 0 \\ 0 & -9 \end{vmatrix}_{2x2} \neq 0 \rightarrow rg=2 \rightarrow (2a^2-4a-6)(-9)=0 \rightarrow -18a^2+36a+54 \begin{cases} a=3 \\ a=-1 \end{cases}$

→ cuando $a \neq 3$ ó $a \neq -1$ → $rg(C)=2$

→ cuando $a=3$ ó $a=-1$ → $rg(C)=1$

→ para ningún valor ∃ $rg(C)=3$.

PROBLEMA 2.

Sean la recta r determinada por los planos x−2y−2z−1 = 0 y x + 5y−z= 0
Estudie los valores que deben tener m y n para que la recta y el plano sean
Y el plano π definido por 2x + y + mz = n

b) Paralelos.
a) Secantes.

$$r \equiv \begin{cases} x-2y-2z=1 \\ x+5y-z=0 \end{cases} \qquad \pi \equiv 2x+y+mz=n$$

- Sacamos A y $A^*$ para estudiar posición relativa:

$$A^* = \begin{pmatrix} \pi \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$$

→ si $rg(A)=3=rg(A^*)$ → SCD → SE CORTAN 1 sol
→ si $rg(A) \neq rg(A^*)$ → SI → PARALELOS ∄ sol
→ si $rg(A) = rg(A^*) \neq$ Nº incóg. → SCI → CONTEN. ∞ sol

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} \multicolumn{3}{c|}{\overbrace{\hphantom{2 \quad 1 \quad m}}^{A}} & \\ 2 & 1 & m & n \\ 1 & -2 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$|A| = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & m & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & -1 & 1 & 5 \end{array}\right| = \begin{array}{l} 4-2+5m-(-1-20-2m)=0 \\ 4-2+5m+1+20+2m=0 \\ = 7m=-23 \rightarrow m=\frac{-23}{7} \end{array}$$

$$|A^*| = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & n & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 5 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right| = \begin{array}{l} 1+5n-10+2n=0 \\ 7n=9 \rightarrow n=\frac{9}{7} \end{array}$$

→ Para que sean secantes $rg A = 3 = rg A^*$ ⟶ por tanto: $m \neq -\frac{23}{7}$ y $n \neq \frac{9}{7}$ para que $|A| \neq 0$ y $|A^*| \neq 0$ (rangos 3)

→ Para que sean paralelos $rg A \neq rg A^*$ ⟶ por tanto: $m = \frac{-23}{7}$ y $n \neq \frac{9}{7}$ para que $\underset{rg=2}{\underset{\downarrow}{|A|=0}}$ y $\underset{rg=3}{\underset{\downarrow}{|A^*| \neq 0}}$

PROBLEMA 3.

Estudia y representa la función f(x).

$$f(x) = \frac{x}{x^2-4}$$

- Dom $f(x) = \mathbb{R} \sim \{-2, 2\}$

$$x^2-4=0 \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases} \rightarrow \text{Anulan el denominador}$$

- Ptos corte:

$\rightarrow$ Eje x $\rightarrow$ $y=0$ $\rightarrow$ $\frac{x}{x^2-4}=0 \rightarrow x=0 \rightarrow PC(0,0)$

$\rightarrow$ Eje y $\rightarrow$ $x=0$ $\rightarrow$ $y=\frac{0}{-4}=0 \rightarrow y=0 \rightarrow PC(0,0)$

- Simetría:

$$f(x)=\frac{x}{x^2-4}$$

$$f(-x)=\frac{-x}{x^2-4}$$

$$-f(x)=\frac{-x}{x^2-4}$$

$f(x)\neq f(-x) \rightarrow$ S. PAR

$f(-x)=-f(x) \rightarrow$ S. IMPAR

- Asíntotas

A.V $\rightarrow$ $\exists$ A.V en $x=2$ y $x=-2$

A.H $\rightarrow$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^{1}}{x^{2}-4}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{ind} \xrightarrow{D^\circ > N^\circ} =\boxed{0}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2-4}=0$

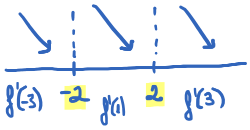
$\exists$ A.H en $y=0$

A.O $\rightarrow$ $\nexists$

- Monotonía $\rightarrow$ $f'(x)=0$

$$f(x)=\frac{x}{x^2-4} \longrightarrow f'(x)=\frac{x^2-4-2x^2}{(x^2-4)^2} \rightarrow \frac{-x^2-4}{(x^2-4)^2}=0 \rightarrow -x^2=4 \rightarrow x^2=-4 \quad \nexists \text{ Ptos relativos}$$

No hay máx ni mín. Estudiamos crecimiento con ptos NO DOM.



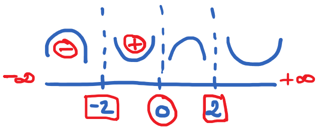

Decreciente en todos sus $\mathbb{R}$ de dominio

$(-\infty,-2)\cup(-2,2)\cup(2,+\infty)$

- Curvatura $\rightarrow$ $f''(x)=0$ Ptos inflexión

$$f'(x)=\frac{-x^2-4}{(x^2-4)^2} \longrightarrow f''(x)=\frac{-2x\,(x^2-4)^{\cancel{2}}-(-x^2-4)\cdot\overbrace{2\,\cancel{(x^2-4)}\cdot 2x}^{v'}}{(x^2-4)^{\cancel{4}\,3}}=\frac{-2x^3+8x-(-4x^3-16x)}{(x^2-4)^3}=\boxed{\frac{2x^3+24x}{(x^2-4)^3}}$$

$$\frac{2x^3+24x}{(x^2-4)^3}=0 \longrightarrow 2x^3+24x=0 \longrightarrow 2x\,(x^2+12)=0 \;<\; \begin{matrix}\boxed{x=0} \text{ pto inflexión} \\ \nexists\end{matrix}$$

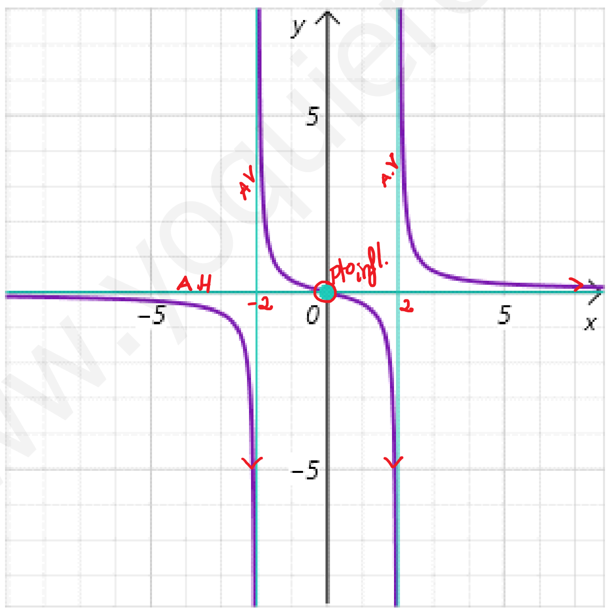



cóncava: $(-2,0)\cup(2,+\infty)$

convexa: $(-\infty,-2)\cup(0,2)$

$\rightarrow$ Pto inflexión en $(\overset{x}{0},\overset{y}{0})$

$\hookrightarrow f(0)=\dfrac{0}{0^2-4}=0$




$f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$

| x | -5 | -1 | 1 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| y | | | | |

PROBLEMA 4.
Se elige un número entero al azar entre el 0 y el 9999 (ambos inclusive) ¿Cuál es la probabilidad de que el número elegido sea mayor de 4444 y múltiplo de 5?

- método 1

→ múltiplo de 5 desde el 4444 al 10000 :

→ $\frac{4444}{5} < k < \frac{10000}{5}$

→ $\underbrace{888'8}_{\text{el + peque múltiplo de 5}} < k < \underbrace{2000}_{\text{el + grande múltiplo de 5}}$

→ $2000 - 890 = \boxed{1110}$ múltiplos de 5

- $P = \frac{Fav.}{Tot} = \frac{1110}{10000} = \boxed{0'1111}$

- método 2

→ $P(\text{mayor que } 4444) = \frac{5555}{10000}$

→ $P(\text{múltiplo de } 5) = \frac{2}{10}$

de cada 10 números tenemos 2 múltiplos de 5

$P(M4444 \cap MultS)$

$P = \frac{5555}{10000} \cdot \frac{2}{10} = \boxed{0'1111}$