PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE CANARIAS

JULIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Cada alumno debe elegir sólo una de las pruebas, A o B.

PRUEBA A

1º) El tiempo diario, en horas, dedicado a ver la TV en una región, sigue una distribución normal con una desviación típica de 1,5 horas. Para estimar la media de esta variable, se ha realizado una encuesta a 256 personas obteniéndose el intervalo de confianza $[4{,}29; 4{,}71]$.

a) ¿Cuál es el valor de la media muestral?

b) ¿Cuál es el nivel de confianza del intervalo?

c) Con los mismos datos, ¿cuál sería el intervalo con un nivel de confianza igual a 0,9?

----

a)

$$\overline{x} = \frac{4{,}71+4{,}29}{2} = \frac{9}{2} = \underline{4{,}5}.$$

b)

$$E = \frac{4{,}71-4{,}29}{2} = \frac{0{,}42}{2} = 0{,}21.$$

Datos: $\sigma = 1{,}5$; $n = 256$; $E = 0{,}21$.

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{E \cdot \sqrt{n}}{\sigma} = \frac{0{,}21 \cdot \sqrt{256}}{1{,}5} = \frac{3{,}36}{1{,}5} = 2{,}24.$

Mirando en la tabla de distribución normal $N(0, 1)$:

$2{,}24 \to 0{,}9875 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}9875$; $2 - \alpha = 1{,}9750$; $1 - \alpha = 0{,}9750$.

$$\underline{El\ nivel\ de\ confianza\ es\ del\ 97{,}50\ \%}.$$

$c)$

$1-\alpha=0{,}90 \rightarrow \alpha=1-0{,}90=0{,}10 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}05}=\mathbf{1{,}645}$.
$(1-0{,}05=0{,}9500 \rightarrow z=1{,}645)$.

Datos: $\overline{x}=4{,}5$; $n=256$; $\sigma=1{,}5$; $z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}645$.

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(4{,}5-1{,}645 \cdot \frac{1{,}5}{\sqrt{256}};\ 4{,}5+1{,}645 \cdot \frac{1{,}5}{\sqrt{256}}\right)$;

$(4{,}5-1{,}645 \cdot 0{,}0938;\ 4{,}5+1{,}645 \cdot 0{,}0938)$; $(4{,}5-0{,}1542;\ 4{,}5+0{,}1542)$.

$\underline{I.C._{90\,\%}\ (4{,}3458;\ 4{,}6542)}$.

****

2º) El 30 % de loa videojuegos que se consumen en España se juegan en PC, el 45 % en consola y el resto en el móvil. De los que se juegan en PC, el 50 % son de acción, el 40 % de estrategia y el resto de otras categorías. De los que se juegan en consola, el 70 % son de acción, el 10 % de estrategia y el resto de otras categorías. De los juegos para móvil, un 25 % son de acción, otro 25 % de estrategia y el resto de otras categorías.

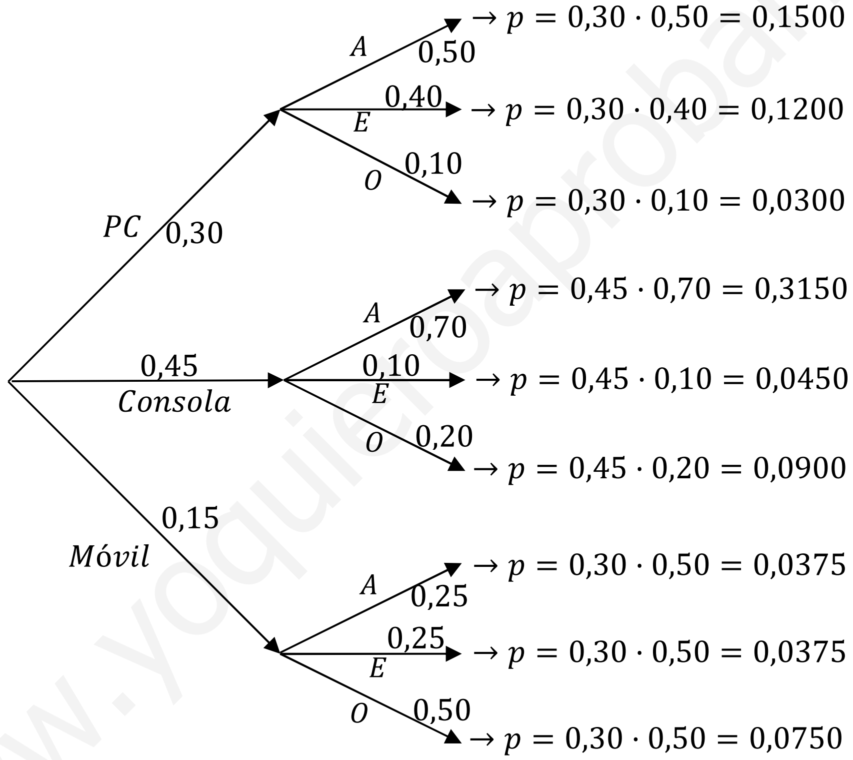
a) Construir el árbol de probabilidades.

b) ¿Qué proporción de los videojuegos consumidos en España son de acción?

c) Se elige al azar un jugador que está jugando a un juego de estrategia, ¿cuál es la probabilidad de que lo esté haciendo a través del móvil?

----

a)



b)

$$P = P(A) = P(PC) \cdot P(A/PC) + P(Co) \cdot P(A/Co) + P(Mo) \cdot P(A/Mo) =$$

$$= 0{,}30 \cdot 0{,}50 + 0{,}45 \cdot 0{,}70 + 0{,}15 \cdot 0{,}25 = 0{,}1500 + 0{,}3150 + 0{,}0375 = 0{,}5025.$$

$$\underline{En\ España\ son\ de\ acción\ el\ 50{,}25\ \%\ de\ los\ juegos.}$$

c)

$$P = P(E/Mo) = \frac{P(Mo \cap E)}{P(E)} = \frac{P(Mo) \cdot P(E/Mo)}{P(PC) \cdot P(E/PC) + P(Co) \cdot P(E/Co) + P(Mo) \cdot P(E/Mo)} =$$

$$= \frac{0{,}15 \cdot 0{,}25}{0{,}30 \cdot 0{,}40 + 0{,}45 \cdot 0{,}10 + 0{,}15 \cdot 0{,}25} = \frac{0{,}0375}{0{,}1200 + 0{,}0450 + 0{,}0375} = \frac{0{,}0375}{0{,}2025} = \underline{0{,}1852}.$$

****

3º) La función: $G(x) = \begin{cases} \frac{2}{5}x \ \ si\ 0 \leq x < 3 \\ \frac{x+3}{x+2} \ \ \ si\ x > 3 \end{cases}$ da la ganancia anual (en cientos de miles de euros) obtenida por una empresa de telefonía móvil en función del tiempo x (en años) transcurrido desde su creación:

a) ¿A cuánto asciende la ganancia transcurridos dos años y medio? ¿Y transcurridos cuatro años?

b) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de dichas ganancias. Justificar la respuesta.

c) ¿Qué sucede a medida que transcurre el tiempo. Razonar la respuesta.

----

a)

$$G(2,5) = \frac{2}{5} \cdot 2,5 = 2 \cdot 0,5 = 1.$$

$$\underline{La\ ganancia\ a\ los\ dos\ años\ es\ de\ 100.000\ euros.}$$

$$G(4) = \frac{2,5+3}{2,5+2} = \frac{5,5}{4,5} = \frac{11}{9} = 1,2222.$$

$$\underline{La\ ganancia\ a\ los\ cuatro\ años\ es\ de\ 122.222,22\ euros.}$$

b)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$G'(x) = \begin{cases} \frac{2}{5} \ \ si\ 0 \leq x < 3 \\ \frac{-1}{(x+2)^2}\ (*)\ si\ x > 3 \end{cases}.$$

(*) $\ h(x) = \frac{x+3}{x+2} \Rightarrow h'(x) = \frac{1 \cdot (x+2) - (x+3) \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{x+2-x-3}{(x+2)^2} = \frac{-1}{(x+2)^2}.$

Teniendo en cuenta que $\frac{2}{5} > 0$ y que $\frac{-1}{(x+2)^2} < 0, \forall x > 3$, los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función $G(x)$ son los siguientes:

$$\underline{G(x)\ creciente: G'(x) > 0 \Rightarrow x \epsilon (0,3).}$$

$$\underline{G(x)\ decreciente: G'(x) < 0 \Rightarrow x \epsilon (3, +\infty).}$$

$c)$

$$\lim_{x \to \infty} G(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x+3}{x+2} = 1.$$

$\underline{Con\ el\ paso\ del\ tiempo\ la\ ganancia\ se\ estabiliza\ en\ 100.000\ euros}.$

****

4º) Los 30 marineros de un barco son de tres nacionalidades, chinos, filipinos y griegos. El número de marineros griegos duplica el total de las otras dos nacionalidades. Además, por cada dos marineros chinos hay tres marineros filipinos.

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.

b) ¿Cuántos marineros de cada nacionalidad hay en el barco?

----

a)

Sean x, y, z los marineros chinos, filipinos y griegos del barco, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=30 \\ z=2\cdot(x+y) \\ 3x=2y \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=30 \\ z=2x+2y \\ 3x-2y=0 \end{array}\right\} \quad \underline{\left.\begin{array}{r} x+y+z=30 \\ 2x+2y-z=0 \\ 3x-2y=0 \end{array}\right\}}.$$

b)

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 30 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}}=\frac{-60}{-4-3-6-2}=\frac{-60}{-15}=4.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 30 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{-15}=\frac{-90}{-15}=6.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 30 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{-15}=\frac{-120-180}{-15}=\frac{-300}{-15}=20.$$

$$\underline{En\ el\ barco\ van\ 4\ chinos, 6\ filipinos\ y\ 20\ griegos.}$$

****

PRUEBA B

1º) Recientes estudios indican que el 35 % de las mujeres embarazadas de una región son fumadoras. Se toma una muestra de 100 mujeres embarazadas en esa región. Calcular la probabilidad de que en dicha muestra:

a) Hay menos de 40 fumadoras.

b) Sean más de 25 las mujeres que fuman.

c) El número de fumadoras esté entre 32 y 38

$$Datos: p = 0{,}35;\ \ q = 1 - 0{,}35 = 0{,}65;\ \ n = 100.$$

$$N\left(p;\ \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right) \Rightarrow N\left(0{,}35;\ \sqrt{\frac{0{,}35 \cdot 0{,}65}{100}}\right) \Rightarrow N(0{,}35;\ 0{,}0477).$$

Tipificando la variable: $X\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \Rightarrow X\left(\frac{x-0{,}35}{0{,}0477}\right)$.

a)

$$P(X < 40).$$

$$P(\overline{X} < 0{,}40) = P\left(\frac{x-0{,}35}{0{,}0477} < \frac{0{,}40-0{,}35}{0{,}0477}\right) = P\left(Z < \frac{0{,}05}{0{,}0477}\right) = P(Z < 1{,}05) =$$

$$= \underline{0{,}8531}.$$

b)

$$P(X > 25).$$

$$P(\overline{X} > 0{,}25) = P\left(\frac{x-0{,}35}{0{,}0477} > \frac{0{,}25-0{,}35}{0{,}0477}\right) = P\left(Z > \frac{-0{,}10}{0{,}0477}\right) = P(Z > -2{,}24) =$$

$$= P(Z < 2{,}24) = \underline{0{,}9875}.$$

c)

$$P(0{,}32 < X < 0{,}38).$$

$$P(0{,}32 < \overline{X} < 0{,}38) = P\left(\frac{0{,}32-0{,}35}{0{,}0477} < Z < \frac{0{,}38-0{,}35}{0{,}0477}\right) =$$

$$= P\left(\frac{-0{,}03}{0{,}0477} < Z < \frac{0{,}03}{0{,}0477}\right) = P(-0{,}63 < Z < 0{,}63) =$$

$$= P(Z < 0{,}63) - P(Z < -0{,}63) = P(Z < 0{,}63) - [1 - P(Z < 0{,}63)] =$$

$$= P(Z < 0{,}63) - 1 + P(Z < 0{,}63) = 2 \cdot P(Z < 0{,}63) - 1 = 2 \cdot 0{,}7357 - 1 =$$

$$= 1{,}4714 - 1 = \underline{0{,}4714}.$$

****

2º) Una compañía telefónica tiene interés en determinar qué proporción de sus clientes estaría dispuesta a aceptar subida de tarifas a cambio de un incremento en el número de megas de descarga. Una encuesta previa indica que esta proporción está en torno al 15 %.

a) ¿De qué tamaño debería ser la muestra de clientes si se quiere estimar dicha proporción con un error inferior a 0,08 con un nivel de confianza del 95 %?

b) Finalmente, se ha realizado el estudio con una muestra de 196 clientes, de los cuales 37 manifestaron su conformidad con la propuesta. Calcular un intervalo de confianza al 92 % para la proporción total de clientes de la compañía que aceptaría dicha propuesta.

----

a)

Nivel de confianza del 92 %.

$$1-\alpha=0{,}92 \;\rightarrow\; \alpha=1-0{,}92=0{,}08 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}04}=\mathbf{1{,}75}.$$
$$(1-0{,}04=0{,}9600 \;\rightarrow z=1{,}75).$$

Datos: $n=196;\;\; p=0{,}15;\;\; q=0{,}85;\; z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}75;\;\; E=0{,}08.$

$$E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}};\;\left(\frac{E}{z_{\frac{\alpha}{2}}}\right)^2=\frac{p\cdot q}{n}\Rightarrow n=p\cdot q\cdot\left(\frac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{E}\right)^2=0{,}15\cdot 0{,}85\cdot\left(\frac{1{,}75}{0{,}08}\right)^2=$$
$$=0{,}1275\cdot 21{,}875^2=0{,}1275\cdot 4785{,}5156=61{,}011.$$

$$\underline{La\ muestra\ debe\ ser, como\ mínimo, de\ 62\ clientes}.$$

b)

Datos: $n=196;\;\; p=0{,}37;\;\; q=0{,}63;\; z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}75.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q, $z_{\frac{\alpha}{2}}$ y n, es la siguiente: $\left(p-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}, p+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}\right)$.

$$\left(0{,}37-1{,}75\cdot\sqrt{\frac{0{,}37\cdot 0{,}63}{196}};\;0{,}37+1{,}75\cdot\sqrt{\frac{0{,}37\cdot 0{,}63}{196}}\right);$$

$$(0{,}37-1{,}75\cdot 0{,}0345;\;0{,}37+1{,}75\cdot 0{,}0345);\;\;(0{,}37-0{,}0604;\;0{,}37+0{,}0604).$$

$$\underline{I.C._{92\,\%}=(0'3096;\;0'4304)}.$$

****

3º) Una zona de una terraza está limitada por las funciones $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ y $g(x) = 2x$, debe ser reparada con pintura impermeabilizante. Si se mide en metros, el precio de la pintura es $6{,}25\ euros/m^2$ y hay que sumar los gastos de aplicación y transportes, que suponen el 80 % del precio total de la pintura necesaria para pintar dicha superficie:

a) Hacer una gráfica de la zona. b) Hallar la superficie de la zona.

c) ¿A cuánto asciende la reparación?

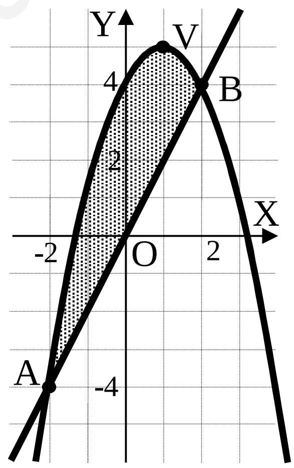
----

a)

Los puntos de intersección de la parábola $f(x) = -x^2 + 2x + 4$ y la recta $g(x) = 2x$ tienen por abscisas las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$-x^2 + 2x + 4 = 2x;\ \ x^2 - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \to A(-2, -4) \\ x_2 = 2 \to B(2{,}4) \end{cases}.$$



El vértice de la parábola $f(x) = -x^2 + 2x + 4$, que es cóncava ($\cap$), es el siguiente:

$$f'(x) = -2x + 2 = 0 \to x = 1.$$

$$f_{(1)} = -1^2 + 2 \cdot 1 + 4 = 5 \Rightarrow V(1, 5).$$

La representación gráfica del conjunto es el indicado en la figura adjunta.

b)

Para el cálculo del área limitada por la parábola y la recta, que es la parte sombreada de la figura, se tiene en cuenta que, en el intervalo $(-2, 2)$, todas las ordenadas de la parábola son mayores que las correspondientes ordenadas de la recta.

$$S = \int_{-2}^{2} [(-x^2 + 2x + 4) - 2x] \cdot dx = \int_{-2}^{2} (-x^2 + 4) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 4x\right]_{-2}^{2} =$$

$$= \left(-\frac{2^3}{3} + 4 \cdot 2\right) - \left[-\frac{(-2)^3}{3} + 4 \cdot (-2)\right] = -\frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} + 8 = 16 - \frac{16}{3} = \frac{48-16}{3} = \frac{32}{3}.$$

$$\underline{S = \frac{32}{3}\ m^2 \cong 10{,}67\ m^2.}$$

c)

Precio de la pintura: $P_p = 6{,}25 \cdot S = 6{,}25 \cdot 10{,}67 = 66{,}67\ euros.$

El precio total, teniendo en cuenta que los gastos de aplicación y transporte suponen el 80 % del precio de la pintura, el precio total es el 180 % del precio de la pintura:

$$P_T = 1{,}8 \cdot P_p = 1{,}8 \cdot 66{,}67 = 120.$$

$$\underline{La\ reparación\ asciende\ a\ 120\ euros.}$$

****

4º) Una empresa fabrica teléfonos móviles con la misma pantalla electrónica en dos calidades distintas: calidad A, cuya carcasa es de plástico y calidad B cuya carcasa es de aluminio. El coste de producción unitario es de 70 euros para los teléfonos de calidad A y de 90 euros para los de calidad B. Asimismo, los precios de venta son de 100 euros para los de clase A y de 150 euros para los de clase B. Si, para fabricar la próxima remesa de móviles, la empresa dispone de un capital de 30.000 euros y su proveedor de componentes es capaz de suministrarle, como máximo, 350 pantallas (que se usan para ambas clases de móviles) y 310 carcasas de aluminio.

a) Plantear el problema que determina el número de móviles de cada calidad que se deben fabricar para maximizar el beneficio.

b) Representar la región factible, determinar una solución óptima y hallar el valor óptimo de la función objetivo.

----

a)

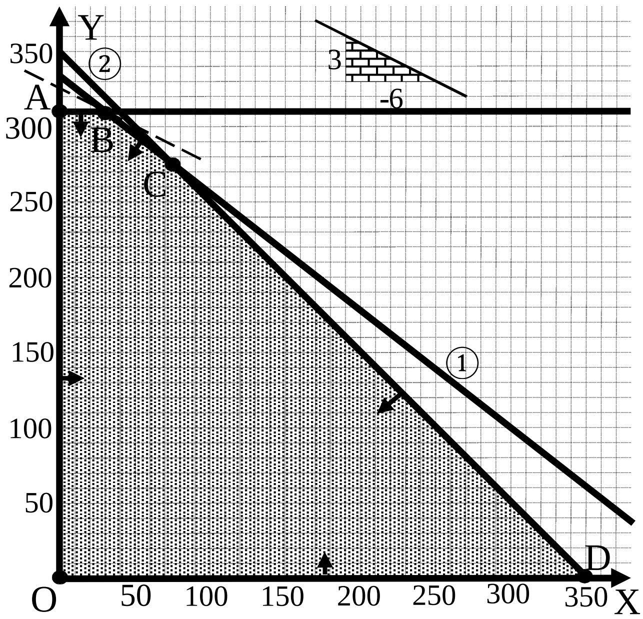
Sean x e y el número de teléfonos de los tipos A y B que se fabrica la empresa, respectivamente.

Las condiciones del ejercicio se establecen mediante el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 70x+90y\le 30.000 \\ x+y\le 350 \\ y\le 310 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\left.\begin{array}{r} 7x+9y\le 3.000 \\ x+y\le 350 \\ y\le 310 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}}.$$

b)

La función compras es $f_C(x,y)=70x+90y$ y la función correspondiente a las ventas es $f_V(x,y)=100x+150y$.



Es evidente que la función de beneficios es la diferencia entre la función ventas y la función compras, o sea:

$$f_B(x,y)=f_V(x,y)-f_C(x,y)=$$

$$=100x+150y-(70x+90y)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_B(x,y)=30x+60y.$$

Para la obtención de la zona factible hacemos lo siguiente:

① $\Rightarrow 7x+9y\le 3.000 \Rightarrow y\le \frac{3.000-7x}{9} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	120	300
y	240	100

② $\Rightarrow x+y\le 350 \Rightarrow y\le 350-x \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	350	0
y	0	350

Los vértices de la zona factible, que es la que aparece sombreada en la figura, además del origen, son los siguientes:

$$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ y = 310 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0, 310).$$

$$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 7x + 9y = 3.000 \\ y = 310 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{3.000 - 9 \cdot 310}{7} = \frac{3.000 - 2.790}{7} = \frac{210}{7} = 30 \Rightarrow B(30, 310).$$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 7x + 9y = 3.000 \\ x + y = 350 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 7x + 9y = 3.000 \\ -7x - 7y = -2.450 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y = 550; \;\; y = 275;$$

$$\left.\begin{array}{r} -7x - 9y = -3.000 \\ 9x + 9y = 3.150 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x = 150; \;\; x = 75 \Rightarrow C(75, 275).$$

$$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ x + y = 350 \end{array}\right\} \Rightarrow D(350, 0).$$

Los valores de la función de beneficios $f_B(x, y) = 30x + 60y$ en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0, 310) = 30 \cdot 0 + 60 \cdot 310 = 0 + 18.600 = 18.600.$

$B \Rightarrow f(30, 310) = 30 \cdot 30 + 60 \cdot 310 = 900 + 18.600 = 19.500.$

$C \Rightarrow f(75, 275) = 30 \cdot 75 + 60 \cdot 275 = 2.250 + 16.500 = 18.750.$

$D \Rightarrow f(350, 0) = 30 \cdot 350 + 60 \cdot 0 = 10.500 + 0 = 10.500.$

El máximo se produce en el punto B.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f_B(x, y) = 30x + 60y = 0 \Rightarrow y = -\frac{30}{60}x \Rightarrow m = -\frac{3}{6}.$$

$$\underline{El\ máximo\ se\ produce\ fabricando\ 30\ telefonos\ tipo\ A\ y\ 310\ tipo\ B.}$$

$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 19.500\ euros.}$$

****