PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE CANARIAS

JUNIO – 2017

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Cada alumno debe elegir sólo una de las pruebas, A o B.

PRUEBA A

1º) Un estudio realizado por una compañía de seguros de coches estima que una de cada cinco personas accidentadas es mujer. Si se contabilizan, por término medio, 144 accidentes cada fin de semana:

a) Calcular la probabilidad de que, en un fin de semana, la proporción de mujeres accidentadas supere el 23 %.

b) Calcular la probabilidad de que, en un fin de semana, la proporción de hombres accidentados no supere el 84 %.

c) ¿Cuál es, por término medio, el número esperado de hombres accidentados cada fin de semana?

----

a)

$$Mujeres \Rightarrow p = \frac{1}{5} = 0{,}2;\ \ q = 1 - p = 0{,}8;\ \ n = 144.$$

$$\hat{P} \equiv N\left(p;\ \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right) \Rightarrow \hat{P} \equiv N\left(0{,}2;\ \sqrt{\frac{0{,}2 \cdot 0{,}8}{144}}\right) = N(0{,}2;\ 0{,}03).$$

$$P(\hat{P} > 0{,}23) = P\left(Z > \frac{0{,}23 - 0{,}2}{0{,}03}\right) = P\left(Z > \frac{0{,}03}{0{,}03}\right) = P(Z > 1) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1) = 1 - 0{,}8413 = \underline{0{,}1587}.$$

b)

$$Hombres \Rightarrow p = \frac{4}{5} = 0{,}8;\ \ q = 1 - p = 0{,}2;\ \ n = 144.$$

$$\hat{P} \equiv \left(p;\ \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right) \Rightarrow \hat{P} \equiv \left(0{,}8;\ \sqrt{\frac{0{,}8 \cdot 0{,}2}{144}}\right) = (0{,}8;\ 0{,}03).$$

$$P(\hat{P} \leq 0{,}84) = P\left(Z \leq \frac{0{,}84-0{,}8}{0{,}03}\right) = P\left(Z \leq \frac{0{,}04}{0{,}03}\right) = P(Z \leq 1{,}33) = \underline{0{,}9082}.$$

$c)$

Se trata de calcular el 80 % de 144.

$$N = 80\ \%\ de\ 144 = 0{,}8 \cdot 144 = 115{,}2$$

$$\underline{Se\ esperan\ 115\ hombres\ accidentados\ cada\ fin\ de\ semana}.$$

****

2º) Para una muestra de tamaño 100, y con una desviación típica de 15 años, la estimación media de la edad, en años, de los usuarios del servicio de atención a personas mayores, está entre 61,745 y 68,255 (ambos inclusive). Suponiendo que la variable manejada es normal:

a) ¿Cuál es la media muestral obtenida?

b) ¿Cuál es el nivel de confianza utilizado?

c) Usando la estimación puntual de la media obtenida en el apartado a), ¿cuál es la probabilidad de que la media de edad de 9 usuarios del servicio sea mayor o igual que 66 años?

----

a)

$$\overline{x} = \frac{68,255+61,745}{2} = \frac{130,000}{2} = \underline{65}.$$

b)

$$E = \frac{68,255-61,745}{2} = \frac{6,51}{2} = 3,255.$$

Datos: $\overline{x} = 65;\ \ n = 100;\ \ \sigma = 15;\ \ E = 3,255.$

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{E \cdot \sqrt{n}}{\sigma} = \frac{3,255 \cdot \sqrt{100}}{15} = 2,17.$$

Mirando en la tabla de distribución normal $N(0; 1)$:

$$\underline{El\ nivel\ de\ confianza\ utilizado\ ha\ sido\ del\ 98,5\ \%}.$$

c)

Datos: $\overline{x} = 65;\ \ n = 9;\ \ \sigma = 15.$

$$N\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow N\left(65; \frac{15}{\sqrt{9}}\right) = N(65;\ 5).$$

$$P(\hat{P} \geq 66) = P\left(Z \geq \frac{66-65}{5}\right) = P\left(Z \geq \frac{1}{5}\right) = P(Z \geq 0,2) =$$

$$= 1 - P(Z < 0,2) = 1 - 0,5795 = \underline{0,4205}.$$

****

3º) Una empresa de material fotográfico oferta una máquina de revelado asegurando que es capaz de pasar a papel 13 fotografías por minuto. Sus cualidades se van deteriorando con el tiempo, de forma que el número de fotografías por minuto varía en función del número de años transcurridos desde su compra, según la siguiente función: $f(x) = \begin{cases} -0{,}5x + 13 & si\ 0 \leq x < 6 \\ \frac{5(x+14)}{x+4} & , si\ x \geq 6 \end{cases}$:

a) Comprobar que el número de fotografías por minuto decrece con el paso de los años.

b) Justificar que a partir de los 6 años revelará menos de 10 fotografías por minuto y que no revelará menos de 5 fotografías por minuto por muy vieja que sea la máquina.

----

a)

Una función es creciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \begin{cases} -0{,}5 & si\ 0 \leq x < 6 \\ \frac{-50}{(x+4)^2}\ (*) & si\ x \geq 6 \end{cases}.$$

(*) Considerada la función $g(x) = \frac{5(x+14)}{x+4}$ es:

$$g'(x) = \frac{5 \cdot (x+4) - 5(x+14) \cdot 1}{(x+4)^2} = \frac{5x+20-5x-70}{(x+4)^2} = \frac{-50}{(x+4)^2}.$$

Para un valor suficientemente grande de x es $g'(x) = \frac{-50}{(x+4)^2} < 0, \forall x \in R$.

$\underline{Queda\ probado\ que\ el\ nº\ de\ fotografías\ disminuye\ con\ el\ paso\ de\ los\ años.}$

b)

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{5(x+14)}{x+4} = 5\ \Rightarrow 5 \leq \lim_{x \to \infty} f(x) \leq 10.$$

$\underline{Queda\ justificado\ que\ a\ partir\ de\ los\ 6\ años\ el\ nº\ de\ fotos\ es\ 5 \leq x < 10.}$

****

4º) En el presupuesto de una corporación pública, las partidas dedicadas a inversión en proyectos de interés comunitario, gastos de funcionamiento (personal y corrientes) y gastos sociales (acciones culturales, educativas y sociales) suman 125 millones de euros. La inversión en proyectos es el 56,25 % del resto de lo presupuestado y, por cada 9 millones dedicados a gastos sociales, hay 11 dedicados a gastos de funcionamiento.

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.

b) Resolver el sistema anterior. ¿Cuáles son las cantidades asignadas a cada partida?

----

a)

Siendo m lo presupuestado en proyectos, según el enunciado sería:

$m = 56{,}25 \cdot (125 - m);\;\; m = 0{,}5625 \cdot 125 - 0{,}5625m;$

$1{,}5625m = 70{,}3125;\;\; m = \frac{70{,}3125}{1{,}5625} = 45.$

Sean x e y el número de millones invertidos en gastos de funcionamiento y en gastos sociales, respectivamente, de la corporación pública que se considera.

El sistema que resulta es el siguiente:

$$\underline{\left.\begin{array}{r} x + y = 45 \\ 9y = 11x \end{array}\right\}}$$

b)

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 45 \\ 9y = 11x \end{array}\right\} \;\; \left.\begin{array}{r} x + y = 45 \\ 11x - 9y = 0 \end{array}\right\} \;\; \left.\begin{array}{r} 9x + 9y = 405 \\ 11x - 9y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 20x = 405;\;\; 4x = 81 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = \frac{81}{4} = 20{,}25. \qquad y = 45 - x = 45 - 20{,}25 = 24{,}75.$

$\underline{Se\ gastan\ 20{,}25\ millones\ en\ funcionamiento\ y\ 24{,}75\ en\ gastos\ sociales.}$

****

PRUEBA B

1º) El gasto mensual en agua de las familias de 4 miembros es una normal de media 32 euros con una desviación típica de 10 euros. Hallar (justificando las respuestas):

a) Probabilidad de que el gasto mensual de una de estas familias sea mayor que 36 euros.

b) Probabilidad de que el gasto mensual de una de estas familias esté entre 28 y 35 euros.

c) Probabilidad de que el gasto medio de 9 de estas familias no supere los 30 euros.

Datos: $\mu = 32;\ \ \sigma = 10.$

a)

$P(X > 36).$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-36}{10}.$

$P(X > 36) = P\left(\frac{X-32}{10} > \frac{36-32}{10}\right) P\left(Z > \frac{4}{10}\right) = P(Z > -0{,}4) =$

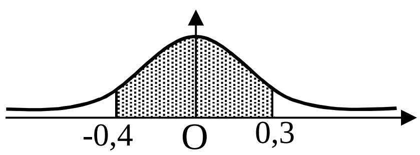
$= 1 - P(Z < 4) = 1 - 0{,}6554 = \underline{0{,}3446}.$

b)

$P(28 < X < 35).$

$P(28 < X < 35) = P\left(\frac{28-32}{10} < \frac{X-32}{10} < \frac{35-32}{10}\right) = P\left(-\frac{4}{10} < Z < \frac{3}{10}\right) =$

$= P(-0{,}4 < Z < 0{,}3) =$



$= P(Z < 0{,}4) - [1 - P(Z < 0{,}3)] =$

$= 0{,}6554 - 1 + P(Z < 0{,}3) = 0{,}6554 - 1 + 0{,}6179 = 1{,}2733 - 1 = \underline{0{,}2733}.$

c)

$P(X < 30) = P\left(\frac{X-32}{10} < \frac{30-32}{10}\right) = P\left(Z < \frac{-2}{10}\right) = P(Z < -0{,}2) =$

$= 1 - P(Z \geq 0{,}2) = 1 - 0{,}5793 = \underline{0{,}4207}.$

****

2º) En una ciudad, el 20 % de las personas que acceden a un centro comercial urbano proceden del centro de la ciudad, el 45 % de barrios periféricos y el resto de pueblos cercanos. Respectivamente, efectúan compras el 60 %, el 75 % y el 50 %.

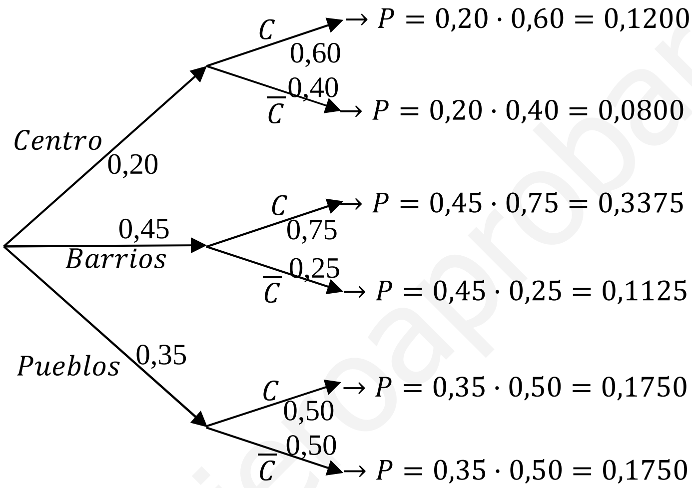
a) Dibujar el árbol de probabilidades.

b) Si un determinado día visitan el centro comercial 2.000 personas, ¿cuál es el número esperado que no realiza compras?

c) De los que entran en una determinada tienda del centro comercial, el 30 % realizan compras. ¿Cuál es el porcentaje de los que, entrando y realizando compras en esa tienda, proceden de barrios periféricos?

----

a)



b)

$$N = 2.000 \cdot P(\overline{C}) = P(Ce) \cdot P(\overline{C}/Ce) + P(B) \cdot P(\overline{C}/B) + P(P) \cdot P(\overline{C}/P) =$$

$$= 2.000 \cdot (0{,}20 \cdot 0{,}40 + 0{,}45 \cdot 0{,}25 + 0{,}35 \cdot 0{,}50) =$$

$$= 2.000 \cdot (0{,}0800 + 0{,}1125 + 0{,}1750) = 2.000 \cdot 0{,}3675 = 735.$$

$$\underline{Se\ espera\ que\ no\ realicen\ compras\ 735\ personas.}$$

c)

$$P = P(B/C) = \frac{P(B \cap C)}{P(C)} = \frac{P(B) \cdot P(C/B)}{P(Ce) \cdot P(C/Ce) + P(B) \cdot P(C/B) + P(P) \cdot P(P/C)} =$$

$$= \frac{0{,}45 \cdot 0{,}75}{0{,}20 \cdot 0{,}60 + 0{,}45 \cdot 0{,}75 + 0{,}35 \cdot 0{,}50} = \frac{0{,}3375}{0{,}1200 + 0{,}3375 + 0{,}1750} = \frac{0{,}3375}{0{,}6325} = 0{,}5336 = 53{,}36\ \%.$$

$$30\ \%\ del\ 53{,}36\ \% \cong 16.$$

$$\underline{Proceden\ de\ los\ barrios\ periféricos\ el\ 16\ \%.}$$

****

3º) Una zona de un patio está limitada por $y = f(x) = 3(x-1)$ e $y = g(x) = \frac{(x-1)^2}{4}$. Si las unidades de medida son metros, justificando las respuestas:

a) Hacer una gráfica de la zona.

b) ¿Cuántos metros cuadrados tiene la zona?

c) Se pretende cubrirla de césped artificial que cuesta 10 euros el metro cuadrado. Si, por razones de instalación, se pierde el 15 % de la superficie adquirida, ¿cuánto cuesta la cantidad de césped artificial que hay que comprar?

----

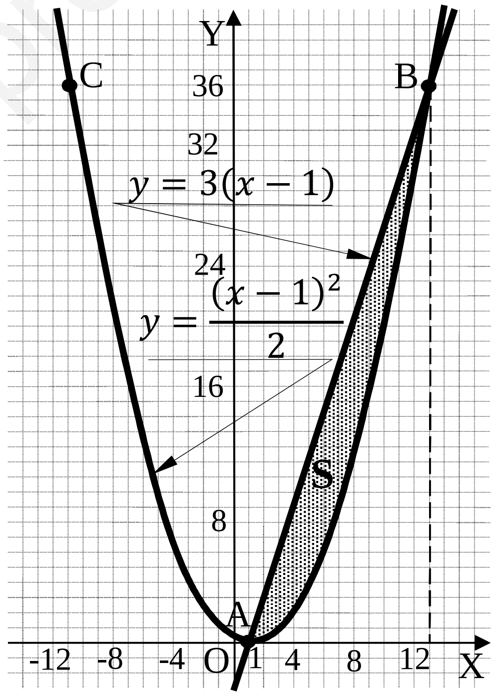
a)

Los puntos de intersección de las funciones son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$3(x-1) = \frac{(x-1)^2}{4};\ \ 12x - 12 = x^2 - 2x + 1 = 0;\ \ x^2 - 14x + 13 = 0;$$

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{196-52}}{2} = \frac{14 \pm \sqrt{144}}{2} = \frac{14 \pm 12}{2} =$$

$$= 7 \pm 6 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \to A(1,0) \\ x_2 = 13 \to B(13,36) \end{cases}.$$



El punto simétrico de B es $C(-11, 36)$.

El vértice de la parábola, que es convexa, $y = f(x) = \frac{(x-1)^2}{4}$ es el siguiente:

$$y' = f'(x) = \frac{x-1}{2} = 0 \to$$

$$\to x = 1 \ \Rightarrow V(1, 0).$$

La representación gráfica, aproximada, aparece en la figura adjunta.

b)

$$S = \int_1^{13} \left[3(x-1) - \frac{(x-1)^2}{2}\right] \cdot dx = \int_1^{13} \left[3x - 3 - \frac{1}{2}(x-1)^2\right] \cdot dx =$$

$$= \left[\frac{3x^2}{2} - 3x\right]_1^{13} - \frac{1}{2} \cdot \int_1^{13} (x-1)^2 \cdot dx = M - \frac{1}{2}N. \qquad (*)$$

$$M = \left[\frac{3x^2}{2} - 3x\right]_1^{13} = \left(\frac{3 \cdot 13^2}{2} - 3 \cdot 13\right) - \left(\frac{3 \cdot 1^2}{2} - 3 \cdot 1\right) = \frac{507}{2} - 39 - \frac{3}{2} + 3 =$$

$= \frac{504}{2} - 36 = 252 - 36 = 216.$

$$N = \int_1^{13} (x-1)^2 \cdot dx \Rightarrow \left(\begin{matrix} x - 1 = t \\ dx = dt \end{matrix} \middle| \begin{matrix} x = 13 \to t = 12 \\ x = 1 \to t = 0 \end{matrix} \right) \Rightarrow \int_0^{12} t^2 \cdot dt =$$

$$= \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{12} = \frac{12^3}{3} - 0 = \frac{1.728}{3} = 576.$$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos de M y N:

$S = 216 + 576 = 792.$

$\underline{La\ zona\ tiene\ 792\ metros\ cuadrados}.$

$c)$

$Coste = 10 \cdot 85\ \%\ de\ 792 = 10 \cdot 0{,}85 \cdot 792 = 6.732.$

$\underline{El\ césped\ cuesta\ 6.732\ euros}.$

****

4º) Una confitería tiene en el almacén 320 bombones de crema de cacao, 240 bombones con frutos secos y 200 bombones con licor. Estos bombones se venden empaquetados en dos tipos de cajas: azules y rojas. En cada caja azul se incluyen 4 bombones de crema, 4 de frutos secos y 2 de licor. En cada caja roja hay 6 bombones de crema, 2 de frutos secos y 4 de licor. Si la caja azul se vende a 8 euros y la caja roja se vende a 10 euros:

a) Plantear el problema que determina el número de cajas de cada tipo que se han de confeccionar para maximizar la recaudación.

b) Representar la región factible, determinar una solución óptima y hallar el valor óptimo de la función objetivo.

----

a)

Sean x e y el número de cajas azules o rojas que se venden, respectivamente.

Las restricciones del ejercicio se establecen en el sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 4x+6y \geq 320 \\ 4x+2y \leq 240 \\ 2x+4y \leq 200 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\} \text{ o mejor: } \left.\begin{array}{r} 2x+3y \geq 160 \\ 2x+y \leq 120 \\ x+2y \leq 100 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\}.$$

b)

La región factible se indica en la figura:

$① \Rightarrow 2x+3y \leq 160 \Rightarrow y \leq \frac{160-2x}{3} \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

x	80	50
y	0	20

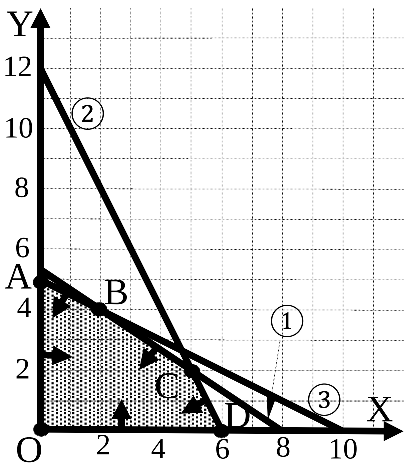
$② \Rightarrow 2x+y \leq 120 \Rightarrow y \leq 120-2x \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

x	0	60
y	120	0

$③ \Rightarrow x+2y \leq 100 \Rightarrow y \leq \frac{100-x}{2} \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

x	100	0
y	0	50

Los vértices de la zona factible, además del origen, son los siguientes:



$$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ x+2y=100 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,50).$$

$$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+3y=160 \\ x+2y=100 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -2x-3y=-160 \\ 2x+4y=200 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow y=40 \Rightarrow B(20,40).$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+3y=160 \\ 2x+y=120 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2x+3y=160 \\ -2x-y=200 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y=40;\ \ y=20 \Rightarrow C(50,20).$$

$$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ 2x + y = 120 \end{array}\right\} \Rightarrow D(60, 0).$$

La función de objetivos es la siguiente: $f(x, y) = 8x + 10y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$$A \Rightarrow f(0, 50) = 8 \cdot 0 + 10 \cdot 50 = 0 + 500 = 500.$$

$$B \Rightarrow f(20, 40) = 8 \cdot 20 + 10 \cdot 40 = 160 + 400 = 560.$$

$$C \Rightarrow f(50, 20) = 8 \cdot 50 + 10 \cdot 20 = 400 + 200 = 600.$$

$$D \Rightarrow f(60, 0) = 8 \cdot 60 + 10 \cdot 0 = 480 + 0 = 480.$$

$$\underline{La\ solución\ óptima\ se\ produce\ vendiendo\ 50\ cajas\ azules\ y\ 20\ cajas\ rojas}.$$

$$\underline{El\ beneficio\ óptimo\ es\ de\ 600\ euros}.$$

****