PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE CANARIAS

JUNIO – 2019

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Cada alumno debe elegir sólo una de las pruebas, A o B.

OPCIÓN A

1º) A partir de una muestra de 225 parados, se estima que un intervalo de confianza para la prestación social media que reciben está entre 407,72 y 442,28 euros (ambos incluidos). Suponiendo hipótesis de normalidad, con una desviación típica de 90 euros:

a) ¿Cuál es la media muestral obtenida?

b) ¿Cuál es el nivel de confianza utilizado?

c) Usando la estimación puntual de la prestación social media obtenida en el apartado a), ¿cuál es la probabilidad de que la media de la presentación social de 25 parados sea mayor o igual que 430 euros?

----

a)

$$\overline{x} = \frac{442{,}28+407{,}72}{2} = \frac{850{,}00}{2} = \underline{425}.$$

b)

$$Datos:\ n = 225;\ \ \sigma = 90;\ \ E = \frac{442{,}28-407{,}72}{2} = \frac{34{,}56}{2} = 17{,}28.$$

Sabemos que $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{E\cdot\sqrt{n}}{\sigma} = \frac{17{,}28\cdot\sqrt{225}}{90} = \frac{17{,}28\cdot 15}{90} = \frac{259{,}2}{90} = 2{,}88.$

De la tabla $N(0,1) \Rightarrow A\ 2{,}88\ le\ corresponde\ 0{,}9980.$

$$P\left(Z < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}9980;\ \ \frac{\alpha}{2} = 0{,}0020; \alpha = 0{,}0040 \Rightarrow 1-\alpha = 0{,}9960.$$

$$\underline{El\ nivel\ de\ confianza\ que\ se\ ha\ utilizado\ es\ del\ 99{,}6\ \%.}$$

c)

$$Datos: \mu = 425;\ \ \sigma = 90;\ \ n = 25.\quad N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(425, \frac{90}{\sqrt{25}}\right) \Rightarrow N(425; 18).$$

Tipificando la variable: $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}=\frac{X-425}{18}$.

$$P=P(X\geq 430)=P\left(Z\geq \frac{430-425}{18}\right)=P\left(Z\geq \frac{5}{18}\right)=P\left(Z\geq \frac{5}{18}\right)=$$

$$=P(Z\geq 0{,}28)=1<P(Z\leq 0{,}28)=1-0{,}6103=\underline{0{,}3897}.$$

****

2º) Una empresa fabrica altavoces para equipos de cine en casa en tres factorías situadas en Japón, Alemania y España. Estos altavoces son de 4 tipos: central, delanteros, efectos y “subwoofer”. En Japón se fabrican altavoces de los 4 tipos siendo idéntica la cantidad de cada uno. En Alemania sólo se fabrican los “subwoofer” y de efectos, siendo la producción de los de efectos doble que los otros. En España se fabrican todos menos el “subwoofer”, con idéntica producción cada uno. Finalmente, también sabemos que la producción de la fábrica de Japón es doble que la de Alemania, y ésta coincide con la de española.

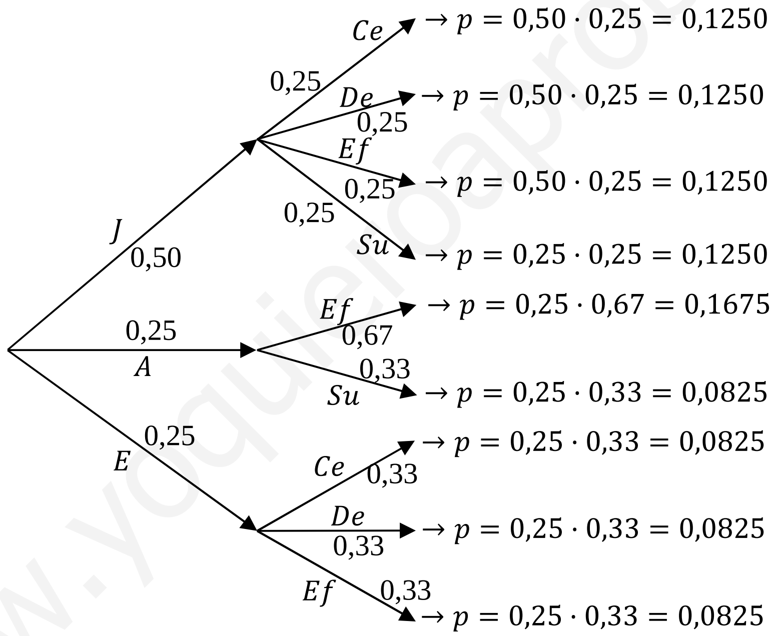
a) Construir el árbol de probabilidades.

b) Elegido, al azar un altavoz fabricado por esta empresa, ¿cuál es la probabilidad de que sea un altavoz central?

c) Si compramos un altavoz central de esta empresa, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado en España?

----

a)



b)

$$P = P(Ce) = P(J) \cdot P(Ce/J) + P(E) \cdot P(Ce/E) =$$

$$= 0{,}50 \cdot 0{,}25 + 0{,}25 \cdot 0{,}33 = 0{,}1250 + 0{,}0825 = \underline{0{,}2075}.$$

c)

$$P = P(E/Ce) = \frac{P(E \cap Ce)}{P(Ce)} = \frac{P(E) \cdot P(Ce/E)}{P(J) \cdot P(Ce/J) + P(E) \cdot P(Ce/E)} = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}33}{0{,}50 \cdot 0{,}25 + 0{,}25 \cdot 0{,}33} =$$

$$= \frac{0{,}0825}{0{,}1250 + 0{,}0825} = \frac{0{,}0825}{0{,}2075} = \underline{0{,}3976}.$$

****

3º) Durante los últimos 5 años, el beneficio de una empresa, en cientos de miles de euros, viene dado por la función $b(t)=\begin{cases} 2t, & t[0,3] \\ 6-\frac{(t-3)^2}{2}, & t \in (3,5] \end{cases}$, siendo t el tiempo en años. Justifica la respuesta:

a) ¿Cuándo ha crecido y ha decrecido $b(t)$?

b) En su caso, determinar cuándo se observan los máximos y mínimos locales de $b(t)$, así como los correspondientes valores.

c) ¿Cuándo el beneficio fue igual a 500.000 euros?

----

a)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$b'(t)=\begin{cases} 2, & t[0,3] \\ -\frac{2t-6}{2}, & t \in (3,5] \end{cases} = \begin{cases} 2, & t[0,3] \\ 3-t, & t \in (3,5] \end{cases}.$$

Los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: b'(t)>0 \Rightarrow t \in (0,3)}.$$

$$\underline{Decrecimiento: b'(t)<0 \Rightarrow t \in (3,5)}.$$

b)

Una función tiene un máximo o un mínimo relativo cuando se anula su primera derivada:

$$b'(t)=0 \Rightarrow 3-t=0 \Rightarrow t=3.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es negativa para los valores que anulan la primera derivada se trata de un máximo y, si es positiva, de un mínimo.

$$b''(t)=\begin{cases} 0, & t[0,3] \\ -1, & t \in (3,5] \end{cases} \Rightarrow b''(3^+)<0 \Rightarrow Máximo\ para\ x=3.$$

$$b(3^-)=b(3^+)=b(3)=6 \Rightarrow \underline{Máx.relativo\ \Rightarrow P(3,6)}.$$

$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 600.000\ euros}.$$

$$b(0)=0. \quad b(5)=6-\frac{(5-3)^2}{2}=6-2=4.$$

$$\underline{Mínimo\ absoluto\ \Rightarrow O(0,0).}$$

$$\underline{El\ beneficio\ mínimo\ es\ de\ 0\ euros.}$$

$c)$

$$b(t)=5 \Rightarrow \begin{cases} 2t=5 \\ 6-\frac{(t-3)^2}{2}=5 \end{cases}.$$

$$2t=5 \rightarrow t_1=2{,}5.$$

$$6-\frac{(t-3)^2}{2}=5;\ \ 1=\frac{(t-3)^2}{2};\ \ 2=(t-3)^2 \rightarrow t_2=3+\sqrt{2} \cong 4{,}41.$$

$$\underline{El\ beneficio\ es\ de\ 500.000\ euros\ para\ t=2{,}5\ y\ para\ t=4{,}41\ años.}$$

****

4º) Una guagua de Madrid a París ofrece hasta 90 plazas de dos tipos: A (al precio de 65 euros y con 30 kg de equipaje), y B (al precio de 95 euros y con 50 kg de equipaje). Si la guagua admite hasta 3.000 kg de equipaje y se quiere maximizar el ingreso total por la venta de plazas:

a) Formar el correspondiente problema de programación lineal y representar la región factible.

b) ¿Cuántas plazas de cada tipo determinan la solución óptima? ¿Cuál es el ingreso total óptimo?

----

a)

Sean x e y el número de plazas de los tipos A y B que deben contratarse, respectivamente.

Las restricciones son las siguientes: $\left.\begin{array}{r} x+y\le 90 \\ 30x+50y\le 3.000 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r} x+y\le 90 \\ 3x+5y\le 300 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}.$

① $\Rightarrow x+y\le 90 \Rightarrow y\le 90-x \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

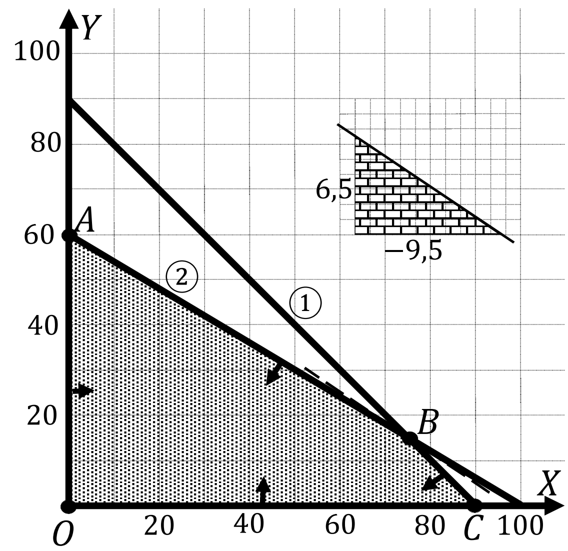
x	0	90
y	90	0

② $\Rightarrow 3x+5y\le 300 \Rightarrow y\ge \frac{300-3x}{5} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	0	100
y	60	0

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura.

Los vértices de la zona factible, además del origen, son los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ 3x+5y=300 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,60).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=90 \\ 3x+5y=300 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -3x-3y=-270 \\ 3x+5y=300 \end{array}\right\};$

$2y=30;\ y=15 \Rightarrow B(75,15).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=0 \\ x+y=90 \end{array}\right\} \Rightarrow C(90,0).$

b)

La función de objetivos es la siguiente: $f(x,y)=65x+95y.$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,60)=65\cdot 0+95\cdot 60=0+5.700=5.700.$

$B \Rightarrow f(75, 15) = 65 \cdot 75 + 95 \cdot 15 = 4.875 + 1.425 = 6.300.$

$C \Rightarrow f(90, 0) = 65 \cdot 90 + 95 \cdot 0 = 5.850 + 0 = 5.850.$

El máximo se produce en el punto B.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x, y) = 65x + 95y = 0 \Rightarrow y = -\frac{65}{90}x = -\frac{13}{19}x = -\frac{6,5}{9,5}x \Rightarrow m = -\frac{6,5}{9,5}.$$

$$\underline{El\ benefico\ es\ máximo\ contratando\ 75\ plazas\ tipo\ A\ y\ 15\ de\ tipo\ B.}$$

$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 6.300\ euros.}$$

****

OPCIÓN B

1º) Si se desea estimar la proporción p de individuos daltónicos de una población a través del porcentaje observado en una muestra aleatoria de individuos de tamaño n.

a) A partir de estudios realizados en poblaciones similares, se cree que el porcentaje de daltónicos en esta población está en torno al 30 %. Utilizando este valor, calcular el tamaño de la muestra para que, con un nivel de confianza del 0,95, el error cometido en la estimación de p sea inferior al 3,1 %.

b) Finalmente se toma una muestra de 64 individuos, en la que se observa un 35 % de individuos daltónicos. Determinar, usando un nivel de confianza del 99 %, el correspondiente intervalo de confianza para la proporción de daltónicos de la población.

----

a)

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1-\alpha=0{,}95 \;\rightarrow\; \alpha=1-0{,}95=0{,}05 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}025}=1{,}96.$
$(1-0{,}025=0{,}9750 \;\rightarrow z=1{,}96).$

Datos: $p=0{,}3;\;\; q=1-0{,}3=0{,}7;\;\; z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}96;\;\; E=0{,}031.$

Sabiendo que $E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}$: $E^2=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2\cdot\frac{p\cdot q}{n}\Rightarrow n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2\cdot\frac{p\cdot q}{E^2}=$

$$=1{,}96^2\cdot\frac{0{,}3\cdot 0{,}7}{0{,}031^2}=3{,}8416\cdot\frac{0{,}21}{0{,}000961}=\frac{0{,}806736}{0{,}000961}=839{,}48.$$

$\underline{El\ número\ mínimo\ de\ daltónicos\ a\ consultar\ es\ de\ 840}.$

b)

Para un nivel de confianza del 99 % es:

$1-\alpha=0{,}99 \;\rightarrow\; \alpha=1-0{,}99=0{,}01 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}005}=2{,}575.$
$(1-0{,}005=0{,}9950 \;\rightarrow z=2{,}575).$

Datos: $n=64;\;\; p=0{,}35;\;\; q=1-0{,}35=0{,}65;\;\; z_{\frac{\alpha}{2}}=2{,}575.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q $y\ n$, es la siguiente: $\left(p-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}},p+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}\right)$.

$$\left(0{,}35-2{,}575\cdot\sqrt{\frac{0{,}35\cdot 0{,}65}{64}};\; 0{,}35+2{,}575\cdot\sqrt{\frac{0{,}35\cdot 0{,}65}{64}}\right);$$

$(0{,}35 - 2{,}575 \cdot 0{,}0596;\ 0{,}35 + 2{,}575 \cdot 0{,}0596);$

$(0{,}35 - 0{,}1535;\ 0{,}35 + 0{,}1535);$

$$\underline{I.C._{99\,\%} = (0{,}1965;\ 0{,}5035)}.$$

****

2º) En cierta región, el peso de los jóvenes que sufren diabetes tipo 2 sigue una distribución normal de media 89 kilogramos y desviación típica igual a 20 kilogramos. Determinar:

a) El porcentaje de jóvenes de esa región, con diabetes tipo 2 que pesa entre 86 y 100 kilogramos.

b) La probabilidad de que el peso medio de un grupo de 25 jóvenes de esa región, con diabetes tipo 2, sea superior a 90 kilogramos.

----

a)

$Datos$: $\mu = 89;\ \ \sigma = 20.$

$X \rightarrow N(\mu;\ \sigma) = N(89;\ 20).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-89}{20}$.

$P = P(86 \leq X \leq 100) = P\left(\frac{86-89}{20} \leq Z \leq \frac{100-89}{20}\right) = P\left(\frac{-3}{20} \leq Z \leq \frac{11}{20}\right) =$

$= P(-0{,}15 \leq Z \leq 0{,}55) = P(Z < 0{,}55) - P(Z < -0{,}15) =$

$= P(Z < 0{,}55) - [1 - P(Z < 0{,}15)] = P(Z < 0{,}55) - 1 + P(Z < 0{,}15) =$

$= 0{,}7088 - 1 + 0{,}5596 = 1{,}2684 - 1 = \underline{0{,}2684}.$

b)

$Datos$: $\mu = 89;\ \ n = 25;\ \ \sigma = 20.$

$X \rightarrow N\left(\mu;\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(89;\ \frac{20}{\sqrt{25}}\right) = N(89;\ 4).$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-89}{4}$.

$P = P(X \geq 90) = P\left(Z \geq \frac{90-89}{4}\right) = P\left(Z \geq \frac{1}{4}\right) = P(Z \geq 0{,}25) =$

$= 1 - P(Z < 0{,}25) = 1 - 0{,}5987 = \underline{0{,}4013}.$

****

3º) Un rincón de una plaza tiene una superficie limitada por $y = (x-3)^2$ e $y = -3x+9$ $(x \geq 0, y \geq 0)$. Si se mide en metros, se pide:

$a)$ Representar la superficie.

$b)$ Para hacerla transitable, se ha de rellenar de hormigón cuyo coste (incluido trabajo y transporte) es de 70 euros por metro cuadrado. Si se desprecia las dos novenas partes del hormigón comprado, ¿cuánto costará hacer el relleno?

$a)$

El vértice de la parábola $y = (x-3)^2$ es el siguiente:

$y' = 3 \cdot (x-3) \cdot 1 = 3x - 9.$ $\qquad y' = 0 \Rightarrow 3x - 9 = 0 \Rightarrow x = 3.$

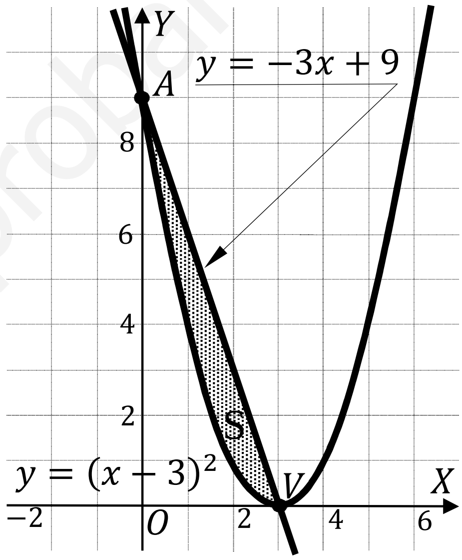
$y_{(3)} = (3-3)^2 = 0 \Rightarrow V(3,0).$

Los puntos de intersección de la parábola con la recta son los siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} y = (x-3)^2 \\ y = -3x+9 \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = -3x + 9;$$

$x^2 - 3x = 0;\ \ x(x-3) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \to A(0,9) \\ x_2 = 3 \to V(3,0) \end{cases}.$$



La representación gráfica de la situación se expresa en la figura adjunta.

$b)$

$$S = \int_0^3 [(-3x+9) - (x-3)^2] \cdot dx = \int_0^3 (-3x + 9 - x^2 + 6x - 9) \cdot dx =$$

$$\int_0^3 (-x^2 + 3x) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_0^3 = \left(-\frac{3^3}{3} + \frac{3 \cdot 3^2}{2}\right) - 0 = -9 + \frac{27}{2} = \frac{9}{2}.$$

Si se desprecian dos novenos del hormigón, se necesita comprar once novenos, por lo cual, el coste es el siguiente:

$$Coste = \frac{11}{9} \cdot \frac{9}{2} \cdot 70 = 11 \cdot 35 = 385.$$

$\underline{El\ relleno\ de\ hormigón\ costará\ 385\ euros.}$

****

4º) Un alumno paga 3 euros al comprar tres lápices, un impreso y dos carpetas. El doble del precio de un lápiz excede en cinco céntimos de euros a la suma de los precios de un impreso y de una carpeta. Si cada lápiz costara cinco céntimos de euro más, entonces su precio duplicaría al de una carpeta.

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.

b) Calcular el precio de cada lápiz, impreso y carpeta.

----

a)

Sean x, y, z los precios de un lápiz, un impreso y una carpeta, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} 3x+y+2z=3 \\ 2x=y+z+0{,}05 \\ x+0{,}05=2z \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 3x+y+2z=3 \\ 40x=20y+20z+1 \\ 20x+1=40z \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 3x+y+2z=3 \\ 40x-20y-20z=1 \\ 20x-40z=-1 \end{array}\right\}.$$

b)

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -20 & -20 \\ -1 & 0 & -40 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 40 & -20 & -20 \\ 20 & 0 & -40 \end{vmatrix}}=\frac{2.400+20-40+40}{2.400-400+800+1.600}=\frac{2.420}{4.400}=\frac{121}{220}=\frac{11}{20}=0{,}55.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 40 & 1 & -20 \\ 20 & -1 & -40 \end{vmatrix}}{4.400}=\frac{-120-80-1.200-40-60+4.800}{4.400}=\frac{4.800-1.500}{4.400}=\frac{33}{44}=\frac{3}{4}=0{,}75.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 40 & -20 & 1 \\ 20 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{4.400}=\frac{60+20+1.200+40}{4.400}=\frac{1.320}{4.400}=\frac{12}{40}=\frac{3}{10}=0{,}3.$$

$\underline{Cuestan, en\ céntimos: un\ lápiz, 55; un\ impreso\ 75\ y\ una\ carpeta\ 30.}$

****