PRUEBA DE ACCESO (EBAU)

UNIVERSIDAD DE CANARIAS

JULIO – 2020

(RESUELTOS por Antonio Menguiano)

MATEMÁTICAS CC SS   Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

Instrucciones: Se debe resolver hasta un máximo de 4 preguntas del siguiente modo:

- De las preguntas A1-A2-B1-B3 se pueden elegir 3 como máximo.
- De las preguntas A3-A4-B3-B4 se pueden elegir 3 como máximo.

GRUPO A

1º) Una multinacional dedicada a la fabricación de vehículos fabrica el 40 % de sus vehículos en España, el 35 % en Francia y el resto en Italia. Los vehículos fabricados son de tres modelos (Ancer, Beam y Celestial). En España se fabrican los tres modelos a partes iguales. En Francia dos terceras partes de los vehículos que se fabrican son del modelo Ancer y el resto son Beam. En Italia se fabrican los modelos Beam y Celestial a partes iguales.

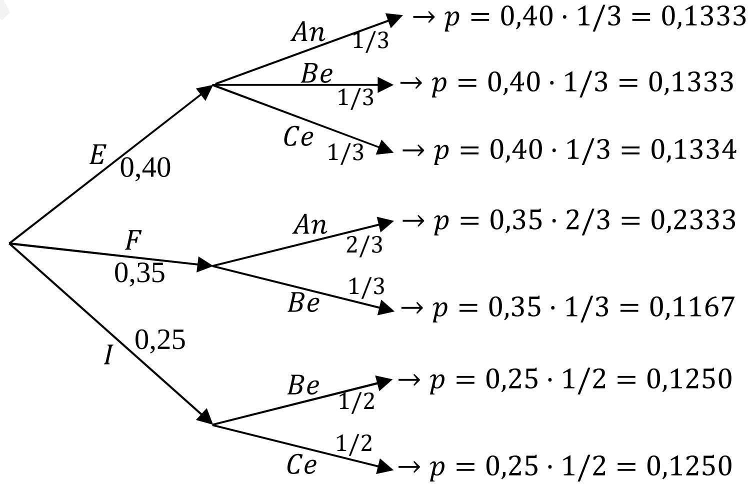
a) Construye el diagrama del árbol de probabilidades.

b) Se elige un vehículo al azar de entre todos los producidos por la multinacional, ¿cuál es la probabilidad de que sea del modelo Beam?

c) Si poseyésemos un vehículo modelo Ancer, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricado en España?

----

a)



b)

$$P = P(Be) = P(E \cap Be) + P(F \cap Be) + P(I \cap Be) =$$

$= P(E) \cdot P(Be/E) + P(F) \cdot P(Be/F) + P(I) \cdot P(Be/I) =$

$= 0{,}40 \cdot 1/3 + 0{,}35 \cdot 1/3 + 0{,}25 \cdot 1/2 = 0{,}1333 + 0{,}1167 + 0{,}1250 =$

$= \underline{0{,}3750}.$

$c)$

$$P = P(E/An) = \frac{P(E \cap An)}{P(An)} = \frac{P(E) \cdot P(An/E)}{P(E) \cdot P(An/E) + P(F) \cdot P(An/F) + P(I) \cdot P(An/I)} =$$

$$= \frac{0{,}40 \cdot 1/3}{0{,}40 \cdot 1/3 + 0{,}35 \cdot 2/3 + 0{,}25 \cdot 0} = \frac{0{,}1333}{0{,}1333 + 0{,}2333 + 0} = \frac{0{,}1333}{0{,}3666} = \underline{0{,}3636}.$$

****

2º) En una determinada provincia, se seleccionó una muestra al azar de 400 personas cuya media de ingresos mensuales resultó igual a 1.250 euros con una desviación típica de 210 euros.

a) Calcular un intervalo de confianza al 90 % para los ingresos medios mensuales.

b) ¿De qué tamaño debe ser la muestra si se desea estimar los ingresos medios mensuales con un error menor de 15 euros y con una confianza del 95 %?

----

a)

Para un nivel de confianza del 90 % es:

$1-\alpha=0{,}90 \ \rightarrow \ \alpha=1-0{,}90=0{,}10 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}05}=1{,}645.$
$(1-0{,}05=0{,}950 \ \rightarrow z=1{,}645).$

Datos: $n=400;\ \ \overline{x}=1.250;\ \ \sigma=210;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}645.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \ \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(1.250-1{,}645\cdot\frac{210}{\sqrt{400}};\ 1.250+1{,}645\cdot\frac{210}{\sqrt{400}}\right);$$

$(1.250-1{,}645\cdot 10{,}5;\ 1.250+1{,}645\cdot 10{,}5);$

$(1.250-17{,}2725;\ 1.250+17{,}2725).$

$$\underline{I.C._{90\ \%}=(1.232{,}7275;\ 1.267{,}2725)}.$$

b)

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1-\alpha=0{,}95 \ \rightarrow \ \alpha=1-0{,}95=0{,}05 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}025}=1{,}96.$
$(1-0{,}025=0{,}9750 \ \rightarrow z=1{,}96).$

Datos: $\sigma=210;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}96;\ \ E=15.$

Siendo $E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \Rightarrow \ \sqrt{n}=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E} \ \Rightarrow n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2=\left(1{,}96\cdot\frac{210}{15}\right)^2=$

$=(1{,}96\cdot 14)^2=27{,}44^2=752{,}95.$

$$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 753\ personas}.$$

****

3º) Una empresa ofrece servicios en internet tiene, en el día de más actividad del año una demanda de datos que viene dada por la función $D(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{10} - \frac{6t}{5} + 4 \; si \; 0 \leq t \leq 8 \\ -\frac{36}{t} + 6 \;\; si \;\; 8 < t \leq 24 \end{cases}$ donde t es la hora del día (de 0 a 24) y $D(t)$ es la demanda de datos a esa hora expresada en cientos de Gigabits por segundo.

a) Representa gráficamente la función. ¿Hubo una demanda continua de datos a lo largo del día? En caso negativo, ¿a qué hora hubo un salto instantáneo de la demanda y cuál fue la magnitud del salto?

b) Calcula los valores de las demandas mínima y máxima absolutas y cuando se alcanzaron.

----

a)

En el intervalo $[0, 8]$ la función es $g(t) = \frac{t^2}{10} - \frac{6t}{5} + 4$, que es una parábola convexa $(\cup)$ por ser positivo el coeficiente de x^2.

El vértice de la parábola es el siguiente:

$g'(x) = \frac{t}{5} - \frac{6}{5} = 0 \Rightarrow t - 6 = 0 \Rightarrow t = 6.$

$g(6) = \frac{6^2}{10} - \frac{6 \cdot 6}{5} + 4 = \frac{36}{10} - \frac{36}{5} + 4 = \frac{36-72+40}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \Rightarrow V\left(6, \frac{2}{5}\right).$

$g(0) = \frac{0^2}{10} - \frac{6 \cdot 0}{5} + 4 \; = 4 \Rightarrow A(0, 4).$

$g(8^-) = \frac{8^2}{10} - \frac{6 \cdot 8}{5} + 4 \; = \frac{64}{10} - \frac{48}{5} + 4 = \frac{64-96+40}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \Rightarrow B\left(8, \frac{4}{5}\right).$

En el intervalo $(8, 24]$ la función es $h(t) = -\frac{36}{t} + 6 = \frac{6t-36}{t}$, que es una rama hiperbólica que tiene la asíntota horizontal $y = 6$ por ser $\lim_{t \to +\infty} h(t) = 6$.

Teniendo en cuenta que $h'(t) = +\frac{36}{t^2} > 0, \forall t \in D(h)$, la función $h(x)$ es monótona creciente en su dominio.

$h(8^+) = -\frac{36}{8} + 6 = \frac{-36+48}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \Rightarrow C\left(8, \frac{3}{2}\right).$

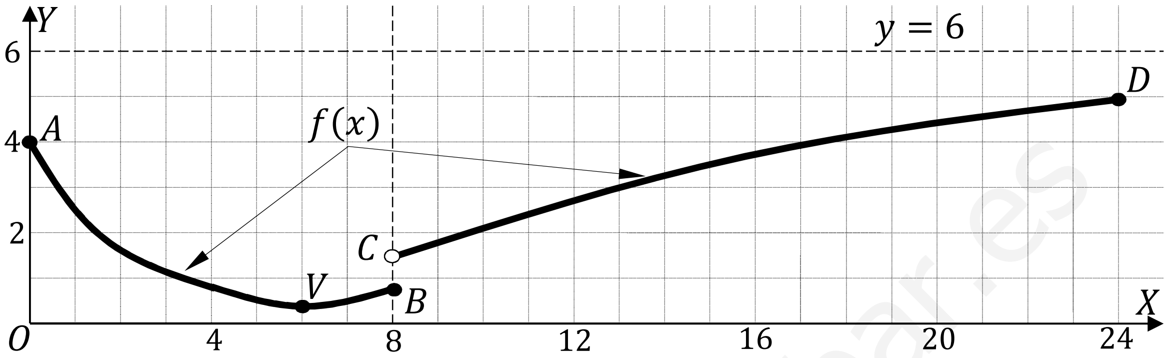
Por ser $\lim_{t \to 8^-} f(t) = \frac{4}{5} \neq \lim_{t \to 8^+} f(t) = \frac{3}{2}$, la función tiene una discontinuidad inevitable de salto finito, cuyo valor es:

$\left|\frac{3}{2} - \frac{4}{5}\right| = \frac{15-8}{10} = \frac{7}{10} \Rightarrow \underline{Valor\ del\ salto\ finito: 0{,}7.}$

$\underline{Lademanda\ fue\ continua\ durante\ la\ jornada, excepto\ a\ las\ 8\ horas.}$

$f(24) = -\frac{36}{24} + 6 = -\frac{3}{2} + 6 = \frac{-3+18}{3} = \frac{15}{3} = 5 \Rightarrow D(24, 5).$

Teniendo en cuenta todos los datos obtenidos anteriormente, la representación gráfica aproximada de la función es la siguiente:



$b)$

De la observación de la gráfica se ve que:

$\underline{La\ demanda\ máxima\ se\ produjo\ a\ las\ 24\ horas\ y\ fue\ de\ 500\ Gigabites.}$

$\underline{La\ demanda\ mínima\ se\ produjo\ a\ las\ 6\ horas\ y\ fue\ de\ 80\ Gigabites.}$

****

4º) En un puesto del mercado se preparan dos tipos de cajas de frutas y verduras para repartir a domicilio. Cada caja del tipo A (caja pequeña) lleva 3 kg de fruta y 3 kg de verdura. Cada caja del tipo B (caja grande) lleva 5 kg de fruta y 8 kg de verdura. Cada día hay que cubrir una demanda fija de al menos 20 cajas del tipo A. Las cajas del tipo A se venden a 10 euros cada uno y las cajas del tipo B a 18 euros cada una. El puesto tiene 195 kg de fruta y 240 kg de verduras disponibles diariamente todas las mañanas. Se desea determinar el número de cajas de cada tipo que se han de preparar diariamente para maximizar los ingresos.

a) Plantear el problema y representar la región factible.

b) ¿Cuántas cajas de cada tipo deben prepararse cada día para maximizar los ingresos? ¿Cuáles son los ingresos máximos?

----

a)

Sean x e y el número de cajas de los tipos A y B, respectivamente, que se preparan diariamente.

Las condiciones del ejercicio son las siguientes: $\left.\begin{array}{r} 3x+5y \le 195 \\ 3x+8y \le 240 \\ x \ge 20;\ y \ge 0 \end{array}\right\}.$

① $\Rightarrow 3x+5y \le 195 \Rightarrow y \le \frac{195-3x}{5} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

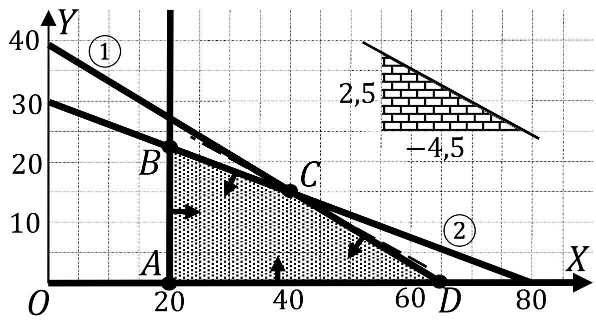
x	0	65
y	39	0

② $\Rightarrow 3x+8y \le 240 \Rightarrow y \le \frac{240-3x}{8} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	0	80
y	30	0

La región factible es la zona que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la sección factible son los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=30 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow A(20,0).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=20 \\ 3x+8y=240 \end{array}\right\} \Rightarrow 60+8y=195;$

$y=\frac{135}{8} \Rightarrow B\left(20,\frac{135}{8}\right).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x+5y=195 \\ 3x+8y=240 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -3x-5y=-195 \\ 3x+8y=240 \end{array}\right\} \Rightarrow 3y=45;\ \ y=15;\ \ 3x+75=195;$

$3x=120;\ \ x=40 \Rightarrow C(40,15).$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=0 \\ 3x+5y=195 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x=195;\ \ x=65 \Rightarrow D(65,0).$

$b)$

La función de objetivos es $f(x, y) = 10x + 18y$.

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(20, 0) = 10 \cdot 20 + 18 \cdot 0 = 200 + 0 = 200.$

$B \Rightarrow f\left(20, \frac{135}{8}\right) = 10 \cdot 20 + 18 \cdot \frac{135}{8} = 200 + 303{,}75 = 503{,}75.$

$C \Rightarrow f(40, 15) = 10 \cdot 40 + 15 \cdot 18 = 400 + 270 = 670.$

$D \Rightarrow f(65, 0) = 10 \cdot 65 + 18 \cdot 0 = 650 + 0 = 650.$

El valor máximo se produce en el punto C.

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x, y) = 10x + 18y = 0 \Rightarrow y = -\frac{10}{18}x = -\frac{5}{9}x = -\frac{2{,}5}{4{,}5}x \Rightarrow m = -\frac{2{,}5}{4{,}5}.$

$\underline{El\ máximo\ beneficio\ se\ obiene\ con\ 10\ cajas\ tipo\ A\ y\ 18\ cajas\ tipo\ B.}$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 670\ euros.}$

****

GRUPO B

1º) En un Instituto de Enseñanza Secundaria se ha seleccionado una muestra aleatoria de 48 estudiantes a quienes se les preguntó si utilizaban la cafetería del instituto. Contestaron negativamente un total de 12 alumnos.

a) Estima, con una confianza del 94 %, en qué intervalo se encuentra la proporción de alumnos que utilizan la cafetería del instituto?

b) ¿Qué tamaño muestral hubiese sido necesario tomar para estimar dicha proporción con un error menor del 4 % y una confianza del 90 %?

----

a)

Para un nivel de confianza del 94 % es:

$1-\alpha=0{,}94 \;\rightarrow\; \alpha=1-0{,}94=0{,}06 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}03}=1{,}88.$

$(1-0{,}03=0{,}9700 \;\rightarrow z=1{,}88).$

Datos: $n=48;\;\; p=\frac{48-12}{48}=\frac{36}{48}=0{,}75;\;\; q=1-0{,}75=0{,}25;\;\; z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}88.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q $y\ n$, es la siguiente: $\left(p-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}, p+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}\right)$.

$$\left(0{,}75-1{,}88\cdot\sqrt{\frac{0{,}75\cdot 0{,}25}{48}};\; 0{,}75+1{,}88\cdot\sqrt{\frac{0{,}75\cdot 0{,}25}{48}}\right);$$

$(0{,}75-1{,}88\cdot 0{,}0625;\; 0{,}75+1{,}88\cdot 0{,}0625);$

$(0{,}75-0{,}1175;\; 0{,}75+0{,}1175);$

$$\underline{I.C._{94\,\%}=(0{,}6325;\; 0{,}8675)}.$$

b)

Para un nivel de confianza del 90 % es:

$1-\alpha=0{,}90 \;\rightarrow\; \alpha=1-0{,}90=0{,}10 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}05}=1{,}645.$

$(1-0{,}05=0{,}950 \;\rightarrow z=1{,}645).$

Datos: $p=0{,}75;\;\; q=0{,}25;\;\; z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}645;\;\; E=0{,}04.$

Sabiendo que $E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}$: $E^2=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2\cdot\frac{p\cdot q}{n} \Rightarrow n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2\cdot\frac{p\cdot q}{E^2}=$

$$= 1,645^2 \cdot \frac{0,75 \cdot 0,25}{0,04^2} = 2,7060 \cdot \frac{0,1875}{0,0016} = 2,7060 \cdot 117,1875 = 317,20.$$

$\underline{El\ número\ mínimo\ de\ estudiantes\ a\ consultar\ es\ de\ 318}.$

****

2º) El peso de las piñas de plátanos de una cooperativa de una determinada zona, se distribuye normalmente con una desviación típica de 8 kg.

a) Determina el tamaño de la muestra si se desea que el intervalo de confianza al 92 % para el peso medio de las piñas de plátanos tenga una amplitud de 4 kg.

b) Si el peso medio de las piñas de plátanos fuera de 40 kg. ¿Cuál sería la probabilidad de que el peso medio de una muestra de 81 piñas estuviese entre 38 y 41 kg?

----

a)

Para un nivel de confianza del 92 % es:

$1-\alpha = 0{,}92 \ \rightarrow \ \alpha = 1 - 0{,}92 = 0{,}08 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}04} = 1{,}75.$
$(1 - 0{,}04 = 0{,}9600 \ \rightarrow z = 1{,}75).$

Datos: $\sigma = 8;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}75;\ \ E = \frac{4}{2} = 2.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \Rightarrow \ \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \ \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1{,}75 \cdot \frac{8}{2}\right)^2 =$

$= (1{,}75 \cdot 4)^2 = 7^2 = 49.$

$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 49\ piñas.}$

b)

$Datos$: $\mu = 40;\ \ n = 81;\ \ \sigma = 8.$

$X \rightarrow N\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(40; \frac{8}{\sqrt{81}}\right) = N\left(40, \frac{8}{9}\right).$

Tipificando la variable: $Z = \frac{X-40}{8/9}$.

$P = P(38 \leq X \leq 41) = P\left(\frac{38-40}{8/9} \leq Z \leq \frac{41-40}{8/9}\right) = P\left(\frac{-2}{8/9} \leq Z \leq \frac{1}{8/9}\right) =$

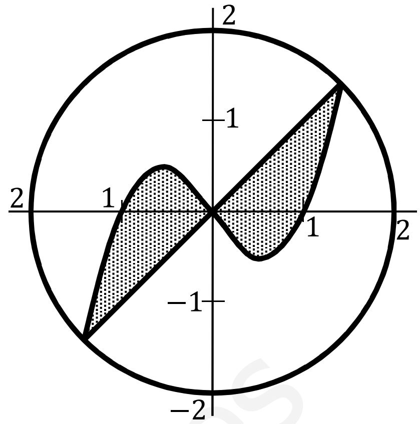
$= P(-2{,}25 \leq Z \leq 1{,}125) = P(Z < 1{,}125) - [1 - P(Z < 2{,}25)] =$

$= P(Z < 1{,}125) - 1 + P(Z < 2{,}25) = \frac{0{,}8686+0{,}8708}{2} - 1 + 0{,}9878 =$

$= 0{,}8697 - 1 + 0{,}9878 = 1{,}8575 - 1 = \underline{0{,}8575}.$

****

3º) La empresa XYPERIA ha encargado la construcción de su logotipo corporativo en madera y cobre, tomando como modelo la figura adjunta, que diseñó una empresa contratada para ello. El círculo, que será de madera, está centrado en el punto $O(0,0)$ y tiene dos metros de radio. Las funciones que delimitan el área sombreada son las siguientes: $f(x)=x^3-x$ y $g(x)=x$.



a) La zona sombreada se va a recubrir de cobre. ¿Qué superficie tiene esta zona?

b) Teniendo en cuenta que el m^2 de plancha de cobre se cobra a 60 euros y no se desperdicia nada, que el coste de mano de obra es el 30 % de lo que cuesta el cobre, y que el círculo de madera, el transporte y el montaje *in situ* tienen un coste fijo de 270 euros, ¿cuánto deberá pagar XYPERIA por la construcción e instalación de su logotipo corporativo?

----

a)

Los puntos de corte de las dos funciones tienen como abscisas las raíces de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$f(x)=g(x) \Rightarrow x^3-x=x;\;\; x^3-2x=0;\;\; x(x^2-2)=0 \Rightarrow x_1=0;$$

$$x^2-2=0 \Rightarrow x_2=-\sqrt{2}, x_3=+\sqrt{2}.$$

Teniendo en cuanta lo anterior y que las dos funciones son simétricas con respecto al origen y que en el intervalo $(0,\sqrt{2})$ las ordenadas de la recta son mayores que las correspondientes ordenadas de la curva, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S=2\cdot\int_0^{\sqrt{2}}[g(x)-f(x)]\cdot dx=2\cdot\int_0^{\sqrt{2}}[x-(x^3-x)]\cdot dx=$$

$$=2\cdot\int_0^{\sqrt{2}}(-x^3+2x)\cdot dx=2\cdot\left[-\frac{x^4}{4}+\frac{2x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{2}}=2\cdot\left[-\frac{x^4}{4}+x^2\right]_0^{\sqrt{2}}=$$

$$=2\cdot\left[\left(-\frac{\left(\sqrt{2}\right)^4}{4}+\left(\sqrt{2}\right)^2\right)-0\right]=2\cdot(-1+2)=2\cdot 1=2.$$

$\underline{\textit{La zona que se recubre de cobre es de } 2\ m^2.}$

b)

Coste del cobre: $2\cdot 60=120\ euros$.

Coste de mano de obra: 30 % $de\ 120=0{,}3\cdot 120=36\ euros$.

Coste de fijos: $270\ euros$.

Total: $120 + 36 + 270 = 426.$

$$\underline{La\ empresa\ deberá\ pagar\ por\ el\ logotipo\ 426\ euros.}$$

$**********$

4º) Una tienda de informática vende pendrives de 32 Gb, 64 Gb y 128 Gb, siendo sus precios de 5 euros, 15 euros y 20 euros, respectivamente. Un cliente ha comprado un total de 15 pendrives que le han costado 160 euros. Sabiendo que el número de pendrives de 128 Gb que compró era la cuarta parte del resto:

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.

b) Calcular cuántos pendrives de cada clase compró el cliente.

----

a)

Sean x, y, z los pendrives que ha comprado el cliente de 32 Gb, 64 Gb y 128 Gb, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} 5x+15y+20z=160 \\ x+y+z=15 \\ z=\frac{x+y}{4} \end{array}\right\} \quad \underline{\left.\begin{array}{r} x+3y+4z=32 \\ x+y+z=15 \\ x+y-4z=0 \end{array}\right\}}.$$

b)

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 32 & 3 & 4 \\ 15 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix}}=\frac{-128+60+0-0-32+180}{-4+3+4-4-1+12}=\frac{240-160}{10}=\frac{80}{10}=8.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 32 & 4 \\ 1 & 15 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix}}{10}=\frac{-60+32-60+128}{10}=\frac{160-120}{10}=\frac{40}{10}=4.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 & 32 \\ 1 & 1 & 15 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{10}=\frac{32+45-32-15}{10}=\frac{45-15}{10}=\frac{30}{10}=3.$$

$\underline{El\ cliente\ compró\ 8\ pendrives\ de\ 32\ Gb, 4\ de\ 64\ Gb\ y\ 3\ de\ 128\ Gb}$.

****