

EXAMEN DE MATEMATICAS MATRICES Y DETERMINANTES

NOMBRE: _____

1.- Obtener la matriz X que verifica

$$AX - B = 3X$$

Siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nota: Problema propuesto en la Prueba de acceso a la Universidad Septiembre de 2004

(2,5 puntos)

2.- Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, calcula, si es posible:

a) $A \cdot B$; b) $B \cdot A$; c) $(A+B^t) \cdot C$ d) C^{-1}

(2 puntos)

3.- Indicar las propiedades de los determinantes que permiten escribir las siguientes igualdades:

$$\begin{vmatrix} 5 & 30 & 20 \\ 6 & 9 & 12 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 15 \begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 15 \begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

(1,5 puntos)

4.- Sea A una matriz idempotente, es decir $A^2=A$. Sea $B=A-I$. Comprueba que entonces $B^3=B$.

(2 puntos)

5.- Una chica contabiliza las horas semanales que dedica a "estudio y lectura", "salidas, amigos, excursiones", día a día del modo que se indica en la tabla:

	Est	Am
Lu	2	1
Ma	3	2
Mi	1	0
Ju	1	0
Vi	4	0
Sa	2	3
Do	2	4

Su tía Filomena y ella valoran cada hora dedicada a cada tarea de forma distinta. He aquí la matriz de sus valoraciones:

	Ella	Tía
Est	3	4
Am	4	2

Contesta a las siguientes preguntas:

- a) Halla el producto de las dos matrices, e interpreta la matriz producto.
 b) ¿Cuál es el día que la chica valora más?, ¿y su tía?.

(2 puntos)

SOLUCIONES EXAMEN MATRICES Y DETERMINANTES
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

1- $AX - B = 3X \Rightarrow AX - 3X = B \Rightarrow (A - 3I)X = B \Rightarrow X = (A - 3I)^{-1} \cdot B \Rightarrow$

Es $A - 3I = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$(A - 3I)^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 9 & 4 & -6 \end{pmatrix}$

$|A - 3I| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 - 3 - 6 = -5$

$(A - 3I)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj} A^t = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 9 & 4 & -6 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow X = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 9 & 4 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ -28 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/5 \\ 9/5 \\ 28/5 \end{pmatrix}$

2) a) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

b) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 3 & 6 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

c) $(A + B^t) \cdot C = \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 12 & 15 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

d) $C^{-1} = \frac{1}{|c|} \text{Adj} C^t = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$C^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Adj} C^t = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad |c| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3$

3) $\begin{vmatrix} 5 & 30 & 20 \\ 6 & 9 & 12 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 15 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 15 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$

Hay 2 filas iguales

La F_2 es múltiplo de 5
La F_3 es múltiplo de 3
 $F_3 + F_1 = F_3'$

4) Si $A^2 = A$ y es $B = A - I$ entonces $B^3 = (A - I)^3 = (A - I)(A - I)(A - I) = \left(\frac{A^2}{A} - \frac{AI}{A} - \frac{IA}{A} + \frac{I^2}{I} \right) \cdot (A - I) =$
 $= (-A + I) \cdot (A - I) = -\frac{A^2}{A} + \frac{AI}{A} + \frac{IA}{A} - I^2 = A - I = B$

5) a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 4 & 0 \\ 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 10 \\ 17 & 16 \\ 3 & 4 \\ 3 & 4 \\ 12 & 16 \\ 18 & 14 \\ 22 & 16 \end{pmatrix}$

La matriz de valoración de cada día para ella y su Tía

b) Ella valora más el Domingo y su tía el martes, Viernes y Domingo.