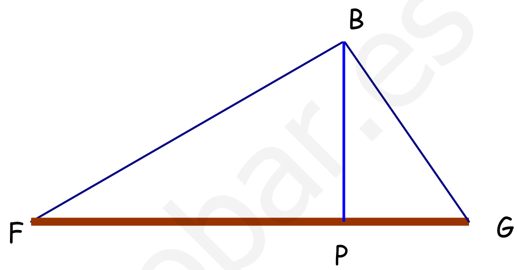
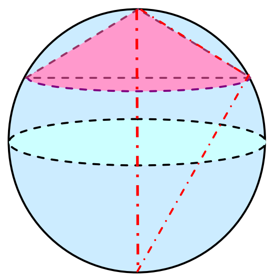
Nombre:

Ejercicio nº 1.- Un barco B que navega hacia puerto se sitúa en un punto tal que su posición forma un ángulo recto con los faros F y G. Desde ese punto, la línea que lo une al puesto P es perpendicular a la costa. Sabemos que $\overline{PG} = 13\text{ km}$ y $\overline{PF} = 26\text{ km}$. Calcula la distancia del barco al puerto y a cada uno de los faros.



2 puntos

Ejercicio nº 2.- En una esfera de 24 cm de diámetro se inscribe un cono cuya generatriz mide 10 cm. Calcula el volumen del cono.



2 puntos

Ejercicio nº 3.- ¡Penalti y expulsión! ¡Roja directa! Pero Pepe, ¿como eres tan bruto? ¡Menuda entrada! La pelota se sitúa en el punto fatídico a 11 m de la portería, que mide 7,42 m entre poste y poste. El "Pichichi" y "Bota de Oro" de la pasada temporada lanza la pelota a ras de suelo 18° hacia la derecha de la línea imaginaria que une el punto de penalti con el centro de la portería. El guardameta mostoleño, engañado, se tira hacia el otro lado. ¿Será gol?

2 puntos

Ejercicio nº 4.- Sabiendo que $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{1}{2}$, utiliza las relaciones fundamentales de trigonometría para calcular el resto de razones trigonométricas. Expresa los resultados con radicales.

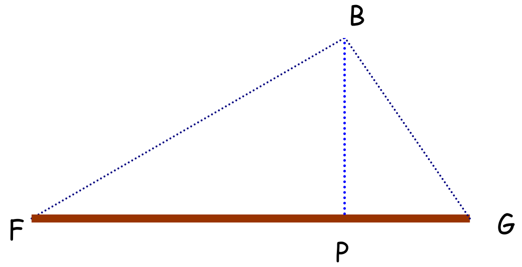
2 puntos

Ejercicio nº 5.- Desde un punto del suelo se ve la parte superior de una torre formando un ángulo de 30° con la horizontal. Si nos acercamos 75 m hacia el pie de la torre, el ángulo es de 60°. Halla la altura de la torre.

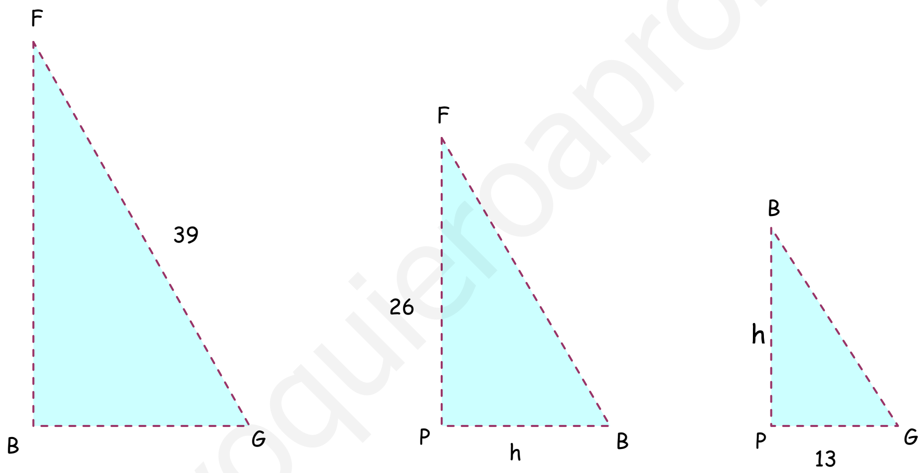
2 puntos

SOLUCIONES

E.1. Un barco B que navega hacia puerto se sitúa en un punto tal que su posición forma un ángulo recto con los faros F y G. Desde ese punto, la línea que lo une al puesto P es perpendicular a la costa. Sabemos que $\overline{PG} = 13\text{ km}$ y $\overline{PF} = 26\text{ km}$. Calcula la distancia del barco al puerto y a cada uno de los faros.



Idea clave: "Al trazar la altura sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo conseguimos otros dos triángulos rectángulos semejantes al primero".
Los colocamos en la misma posición para establecer semejanzas:



- Entre el triángulo grande y el mediano se cumple:

$$\frac{\overline{FB}}{26} = \frac{39}{\overline{FB}} \Rightarrow \overline{FB}^2 = 39 \cdot 26 = 1014 \Rightarrow \overline{FB} = \sqrt{1014} \approx 31{,}843\,.$$

- Entre el triángulo mediano y el pequeño se cumple:

$$\frac{26}{h} = \frac{h}{13} \Rightarrow h^2 = 26 \cdot 13 = 338 \Rightarrow h = \sqrt{338} \approx 18{,}385\,.$$

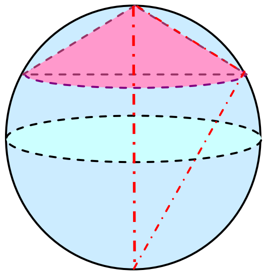
- Aplicamos el Teorema de Pitágoras en el triángulo pequeño:

$$\overline{BG}^2 = \left(\sqrt{338}\right)^2 + 13^2 \Rightarrow \overline{BG} = \sqrt{338 + 169} \approx 22{,}517\,.$$

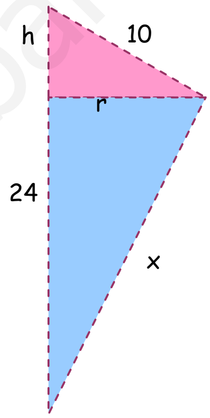
Solución

El barco está, aproximadamente, a 22,517 km del puerto; a 31,843 km del faro F, y a 18,385 km del faro G.

E.2. En una esfera de 24 cm de diámetro se inscribe un cono cuya generatriz mide 10 cm. Calcula el volumen del cono.



Para calcular el volumen del cono necesitamos conocer el radio de su base y su altura. Los triángulos rosa-azul (grande), azul (mediano) y rosa (pequeño) son rectángulos pues se consiguen trazando la altura del grande sobre su hipotenusa.



- Aplicamos el Teorema de Pitágoras para calcular x:

$$x^2 + 10^2 = 24^2 \Rightarrow x = \sqrt{576 - 100} \approx 21,82 .$$

- Establecemos una proporcionalidad entre el triángulo grande y el mediano para conseguir el radio del cono:

$$\frac{24}{21,82} = \frac{10}{r} \Rightarrow r = \frac{218,2}{24} \approx 9,09$$

- Para calcular la altura del cono, establecemos una proporción entre el triángulo grande y el triángulo mediano:

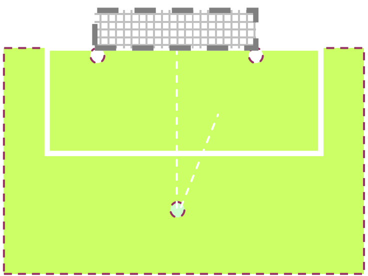
$$\frac{24}{10} = \frac{10}{h} \Rightarrow h = \frac{100}{24} = 4,1\widehat{6}$$

Finalmente, $V = \frac{A_{base} \cdot h}{3} = \frac{\pi r^2 \cdot h}{3} = \frac{\pi \cdot (9,09)^2 \cdot 4,1\widehat{6}}{3} = 114,761 \cdot \pi \ \ cm^3$.

Solución

El volumen del cono es 360,53 cm^3.

E.3. ¡Penalti y expulsión! ¡Roja directa! Pero Pepe, ¿como eres tan bruto? ¡Menuda entrada! La pelota se sitúa en el punto fatídico a 11 m de la portería, que mide 7,42 m entre poste y poste. El "Pichichi" y "Bota de Oro" de la pasada temporada lanza la pelota a ras de suelo 18º hacia la derecha de la línea imaginaria que une el punto de penalti con el centro de la portería. El guardameta mostoleño, engañado, se tira hacia el otro lado. ¿Será gol?



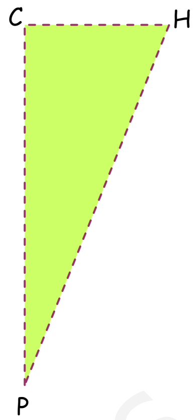
Formamos un triángulo rectángulo cuyos vértices son el centro de la portería, C, el punto de penalti, P, y el lugar a donde llega el balón, H. Después calculamos el tamaño del cateto horizontal:

El ángulo $\hat{P} = 18°$ y el cateto contiguo es $\overline{PC} = 11$. Utilizamos la tangente de 18° para calcular el cateto opuesto

$$\text{tg } 18° = \frac{\overline{CH}}{11} \Rightarrow \overline{CH} = 11 \cdot \text{tg } 18° \leq 3{,}58$$

Como la mitad de la portería es $7{,}42 : 2 = 3{,}71 > 3{,}58$ y el portero se lanza al lado contrario, será gol.

La distancia al poste es $3{,}71 - 3{,}58 = 0{,}14$ m

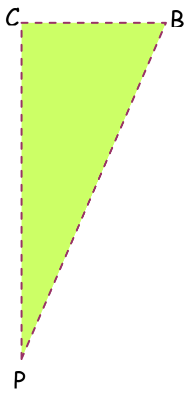


Solución

Es gol y el balón entra a 14 cm del palo derecho.

Otra forma:

Consideramos el triángulo rectángulo de vértices P (punto de penalti), C (centro de la portería) y B (base del poste derecho):



$\overline{CB}$ es la mitad de la portería y mide $7{,}42 : 2 = 3{,}71$ m

$\overline{PC}$ es la distancia del punto de penalty a la portería: 11 m

Calculamos el ángulo en el vértice P:

$$\text{tg } \hat{P} = \frac{\overline{CB}}{\overline{PC}} = \frac{3{,}71}{11} = 0{,}3372 \Rightarrow \hat{P} = \text{arc tg}\,(0{,}3372) \approx 18{,}64°$$

Como el delantero lanza con una amplitud menor (18°), también podemos justificar de esta manera que es gol.

E.4. Sabiendo que $\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{2}$, utiliza las relaciones fundamentales de trigonometría para calcular el resto de razones trigonométricas. Expresa los resultados con radicales.

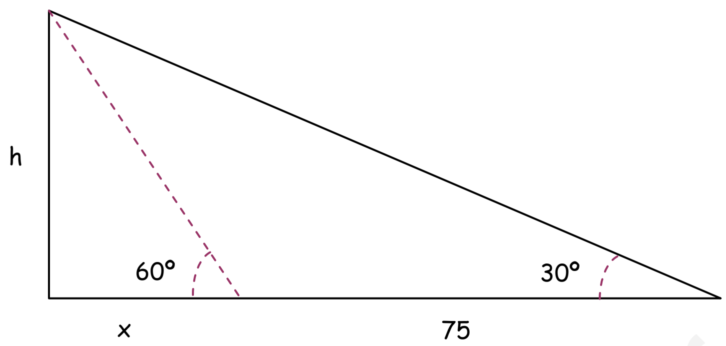
$$\text{(I)} \ \boxed{\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{(II)} \ \boxed{\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

E.5. Desde un punto del suelo se ve la parte superior de una torre formando un ángulo de 30° con la horizontal. Si nos acercamos 75 m hacia el pie de la torre, el ángulo es de 60°. Halla la altura de la torre.



En cada triángulo rectángulo se cumple:

$$\left\{\begin{aligned} \operatorname{tg} 60° &= \frac{h}{x} \\ \operatorname{tg} 30° &= \frac{h}{x+75} \end{aligned}\right. \Rightarrow \left\{\begin{aligned} &x\cdot \operatorname{tg} 60° = h \ ^{(*)} \\ &(x+75)\cdot \operatorname{tg} 30° = h \end{aligned}\right. \overset{\text{Igualación}}{\Rightarrow} x\cdot \operatorname{tg} 60° = x\cdot \operatorname{tg} 30° + 75\cdot \operatorname{tg} 30° \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\cdot \operatorname{tg} 60° - x\cdot \operatorname{tg} 30° = 75\cdot \operatorname{tg} 30° \Rightarrow x\cdot(\operatorname{tg} 60° - \operatorname{tg} 30°) = 75\cdot \operatorname{tg} 30° \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{75\cdot \operatorname{tg} 30°}{\operatorname{tg} 60° - \operatorname{tg} 30°} = 37{,}5 \text{ m} \overset{(*)}{\Rightarrow} h = 37{,}5\cdot \operatorname{tg} 60° \approx 64{,}95 \text{ m}$$

Solución

La torre tiene una altura aproximada de 64, 95 metros.