PROBLEMAS DE PROBABILIDAD PROPUESTOS EN LAS PRUEBAS DE EvAU–EBAU–PEBAU

En las páginas que siguen están resueltos todos los problemas propuestos en la selectividad de 2018 (en las convocatorias de junio y septiembre).
En seis distritos universitarios no propusieron problemas de este bloque.

→ Andalucía, junio y septiembre 2017. No se ha propuesto ninguna pregunta de Probabilidad.

1. Aragón, junio 2018
4A. (1,5 puntos) Al 80 % de los alumnos de una clase les gusta el fútbol; al 40 % les gusta el balonmano y al 30 % les gustan ambos deportes.
a) (0,75 puntos) Si se elige un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que le guste alguno de los dos deportes (uno o los dos)?
b) (0,75 puntos) Se eligen 10 alumnos al azar con reemplazamiento, es decir, cada vez que se elige un alumno se le pregunta por sus gustos y se repone a la clase, pudiendo ser elegido nuevamente. Calcule la probabilidad de que solo a 3 les guste el fútbol (NO es preciso finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen y sin hacer los cálculos).
Solución:
Sean F y B los sucesos a un alumno "le gusta el fútbol", "le gusta el balonmano", respectivamente. Se sabe que:

$$P(F)=0,80,\ P(B)=0,40;\ P(F\cap B)=0,30.$$

a) Por la probabilidad de la unión de sucesos, la probabilidad de que a un alumno le guste alguno de los dos deportes, es:

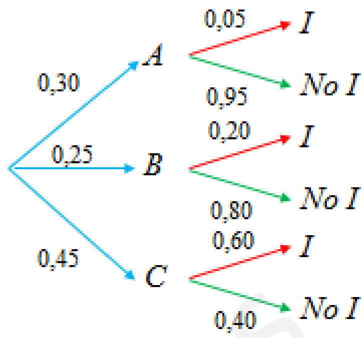
$$P(F\cup B)=P(F)+P(B)-P(F\cap B) = 0,80 + 0,40 - 0,30 = 0,90.$$

b) Se trata de una binomial $B(10, 0,8)$.
La probabilidad de que solo a 3 les guste el fútbol:

$$P(X=3)=\binom{10}{3}\cdot 0,8^3\cdot 0,2^7 = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot 0,8^3\cdot 0,2^7 \approx 0,000786.$$

2. Aragón, junio 2018
4B. (1,5 puntos) En una empresa los trabajadores se clasifican en tres categorías: A, B y C. El 30 % de los trabajadores pertenecen a la categoría A; el 25 % a la categoría B y el resto a la categoría C.
Además, se sabe que de los trabajadores de la categoría A un 5 % habla inglés; mientras que de la categoría B un 20 % habla inglés y de los trabajadores de la categoría C un 60 % habla inglés.
a) (0,75 puntos) Si se elige al azar un trabajador de la empresa, ¿cuál es la probabilidad de que hable inglés?
b) (0,75 puntos) Si se elige al azar un trabajador de la empresa y resulta que SI habla inglés, ¿cuál es la probabilidad de que pertenezca a la categoría C?
Solución:

Puede hacerse el diagrama de árbol adjunto.
Hablar inglés se denota por *I*; no hablarlo por *No I*.



a) La probabilidad de que un trabajador de esa empresa hable inglés será:

$$P(I) = P(A)\cdot P(I/A) + P(B)\cdot P(I/B) + P(C)\cdot P(I/C) =$$

$$= 0{,}30 \cdot 0{,}05 + 0{,}25 \cdot 0{,}20 + 0{,}45 \cdot 0{,}60 = 0{,}335.$$

b) Por Bayes, la probabilidad de que si el trabajador habla inglés sea de la categoría *C* es:

$$P(C/I) = \frac{P(C)\cdot P(I/C)}{P(I)} = \frac{0{,}45\cdot 0{,}60}{0{,}335} = \frac{270}{335} \approx 0{,}806.$$

<u>**3**. Aragón, septiembre 2018</u>

4A. (1,5 puntos) Se lanza 10 veces un dado equilibrado (es decir un dado donde todas sus caras tienen la misma probabilidad de aparecer).
a) (0,75 puntos) Determine la probabilidad de que salga un número par en todos los lanzamientos.
b) (0,75 puntos) Determine la probabilidad de que salga un número par exactamente en tres lanzamientos. (NO es preciso finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen y sin hacer los cálculos).
<u>Solución</u>:

a) La probabilidad de sacar un número par en cada lanzamiento es: $P(2,4,6) = \frac{1}{2}$.

Como cada lanzamiento es independiente del anterior, la probabilidad de que los 10 lanzamientos salga un número para será:

$$P(\text{ par en los 10 lanzamientos}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}.$$

b) La variable aleatoria *X* que mide el número de veces que sale par en 10 lanzamiento, puede tratarse como una binomial $B(10,\ 0{,}5)$.

Con esto:

$$P(X=3) = \binom{10}{3} 0{,}5^3 \cdot 0{,}5^7 = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{1}{1024} = \frac{120}{1024} = \frac{15}{128}.$$

4. Aragón, septiembre 2018

4B. (1,5 puntos)

a) (0,75 puntos) En una clase de 20 alumnos, 10 estudian ruso, 12 practican algún deporte y tan solo 2 hacen ambas cosas. ¿Cuál es la probabilidad de que, al escoger un alumno al azar, si estudia ruso, practique algún deporte?

b) (0,75 puntos) Un tirador de pistola olímpica, tiene una probabilidad de 0,8 de hacer blanco. Si dispara 12 veces, ¿cuál es la probabilidad de que haga 10 o más blancos? (NO es preciso finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen y sin hacer los cálculos).

Solución:

a) Sean R e D los sucesos estudiar ruso y practicar algún deporte, respectivamente.

Se sabe que:

$$P(R)=\frac{10}{20}=0,50,\ P(D)=\frac{12}{20}=0,60;\ P(R\cap D)=\frac{2}{20}=0,10.$$

Por la probabilidad condicionada: $P(D/R)=\dfrac{P(R\cap D)}{P(R)}=\dfrac{0,10}{0,50}=0,20$.

b) La variable aleatoria X que mide el número de "blancos" en 12 disparos, puede tratarse como una binomial $B(12,\ 0,8)$ → la probabilidad de acertar (banco) = 0,8; la de fallar, 0,2.

Con esto:

$$P(X\geq 10)=P(X=10)+P(X=11)+P(X=12)=$$

$$=\binom{12}{10}\cdot 0,8^{10}\cdot 0,2^2+\binom{12}{11}\cdot 0,8^{11}\cdot 0,2+\binom{12}{12}\cdot 0,8^{12}=$$

$$=0,8^{10}\cdot\left(66\cdot 0,2^2+12\cdot 0,8\cdot 0,2+1\cdot 0,8^2\right)\approx 0,5583.$$

5. Asturias, junio 18

4A. En un espacio muestral se tienen dos sucesos independientes: A y B. Se conocen las siguientes probabilidades: $p(A\cap B)=0,3$ y $p(A/B)=0,5$. Calcula:

a) $p(A)$ y $p(B)$. (1 punto)

b) $p(A\cup B)$ y $p(B/A)$. (1 punto)

c) La probabilidad de que no ocurra ni el suceso A ni el suceso B. (0,5 puntos)

Solución:

Como los sucesos son independientes se cumple que:

$$p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B);\ p(A/B)=p(A);\ p(B/A)=p(B).$$

Por tanto:

a) Por $p(A/B)=p(A)\Rightarrow p(A)=0,5$.

De $p(A\cap B)=p(A)\cdot p(B)\Rightarrow 0,3=0,5\cdot p(B)\Rightarrow p(B)=0,6$.

b) Por $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)\Rightarrow p(A\cup B)=0,5+0,6-0,3=0,8$.

De $p(B/A)=p(B)\Rightarrow p(B/A)=0,5$.

c) Por una de las leyes de Morgan:

$$p(\overline{A}\cap\overline{B})=p(\overline{A\cup B})=1-p(A\cup B)=1-0,8=0,2.$$

<u>**6**. Asturias, junio 18</u>

4B. En la siguiente tabla se muestra la distribución de un grupo de personas en relación al consumo de tabaco:

	Fumador	No fumador
Hombres	10	30
Mujeres	20	40

Se elige en ese grupo una persona al azar. Calcula las probabilidades de los siguientes sucesos diferentes:

a) Sea fumador. (0,5 puntos)

b) Sabiendo que es fumador, se trate de una mujer. (1 punto)

c) Se extrae una segunda persona al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que una fume y la otra no? (1 punto)

<u>Solución</u>:

La tabla dada puede completarse como sigue:

	Fumador	No fumador	Total
Hombres	10	30	40
Mujeres	20	40	60
Total	30	70	100

Sean los sucesos:

H = hombre; M = mujer; F = fumador; $\overline{F}$ = no fumador.

a) Hay un total de 30 fumadores: $P(F)=\dfrac{30}{100}=0,30$.

b) De 30 fumadores, 20 son mujeres: $P\left(M/F\right)=\dfrac{20}{30}=\dfrac{2}{3}$.

c) La probabilidad de que de dos personas de ese grupo una fume y otra no, es:

$$P\left(F\cap\overline{F}\right)=P\left(1^{\text{a}}F\cap 2^{\text{a}}\overline{F}\right)+P\left(1^{\text{a}}\overline{F}\cap 2^{\text{o}}F\right) = \frac{30}{100}\cdot\frac{70}{99}+\frac{70}{100}\cdot\frac{30}{99}=\frac{14}{33}\approx 0,42.$$

<u>7. Asturias, julio 18</u>

4A. Consideremos dos dados, uno normal con las caras numeradas del 1 al 6 y otro trucado, con 4 caras con el número 5 y 2 caras con el número 6. Se elige al azar uno de los dados y se lanza.

a) Calcula la probabilidad de sacar 5. (1,25 puntos)

b) Si el resultado de la tirada es 5, ¿cuál es la probabilidad de haber elegido el dado trucado? (1,25 puntos)

<u>Solución</u>:

a) La probabilidad de obtener un 5 en el dado normal, $D(b)$, es $P\left(5/D(b)\right)=\dfrac{1}{6}$.

La probabilidad de obtener un 5 en el dado trucado, $D(t)$, es $P\left(5/D(t)\right)=\dfrac{4}{6}$.

Por la probabilidad total:

$$P(5)=P\left(D(b)\right)\cdot P\left(5/D(b)\right)+P\left(D(t)\right)\cdot P\left(5/D(t)\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6}=\frac{5}{12}.$$

b) Por Bayes:

$$P\left(D(t)/5\right)=\frac{P\left(D(t)\right)\cdot P\left(5/D(t)\right)}{P\left(5\right)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6}}{\frac{5}{12}}=\frac{4}{5}.$$

<u>**8**. Asturias, julio 18</u>

4B. En una ciudad hay dos equipos destacados, uno de futbol y otro de baloncesto. Todos los habitantes son seguidores de alguno de los dos equipos. Se sabe que hay un 60 % de seguidores del equipo de futbol y otro 60 % seguidor del equipo de baloncesto. Calcula:

a) La probabilidad de que un habitante sea seguidor de ambos equipos a la vez. (1 punto)

b) La probabilidad de que un habitante sea únicamente seguidor del equipo de futbol (0,5 puntos)

c) Se elige al azar un habitante de la ciudad y se comprueba que es seguidor del equipo de baloncesto. ¿Cuál es la probabilidad de que sea también seguidor del equipo de futbol? (1 punto)

<u>Solución</u>:

Sean F y B los sucesos a un habitante "es aficionado al fútbol", "es aficionado al baloncesto", respectivamente. Se sabe que:

$$P\left(F\right)=0,60,\ P\left(B\right)=0,60;\ P\left(F\cup B\right)=1.$$

a) Como $P\left(F\cup B\right)=P\left(F\right)+P\left(B\right)-P\left(F\cap B\right)\Rightarrow$

$$1=0,60+0,60-P\left(F\cap B\right)\Rightarrow P\left(F\cap B\right)=0,20.$$

b) $P\left(F-B\right)=P\left(F\right)-P\left(F\cap B\right)=0,60-0,20=0,40$.

c) $P\left(B/F\right)=\dfrac{P\left(F\cap B\right)}{P\left(F\right)}=\dfrac{0,20}{0,60}=\dfrac{1}{3}$.

9. Baleares, junio 18

Opción A

4. Volem fer un estudi de les opinions polítiques dels estudiants de primer curs de la UIB. Per això, hem agafat una mostra representativa de 500 estudiants de primer curs i els hem demanat quin partit polític varen votar a les darreres eleccions. Dels 500 estudiants, 200 varen respondre que varen votar el PP, 100 el PSIB i la resta altres formacions polítiques. Sabent que 200 dels estudiants eren al·lots, que el 40% dels votants del PP són al·lotes i que el 50% dels votants del PSIB són al·lots, es demana:

a) La probabilitat que un estudiant hagi votat altres formacions polítiques i sigui al·lota. (4 punts)

b) La probabilitat que un estudiant al·lot hagi votat el PP. (2 punts)

c) La probabilitat que un estudiant que ha votat altres formacions polítiques sigui al·lota. (4 punts)

Solución:

Los datos que proporciona el problema se pueden anotar en la tabla que sigue:

	Votantes	Chicos	Chicas
PP	200		(40 %) $\to$ 80
PSIB	100	(50 %) $\to$ 50	
OTROS			
Totales	500	200	300

Puede completarse así:

	Votantes	Chicos	Chicas
PP	200	120	(40 %) $\to$ 80
PSIB	100	(50 %) $\to$ 50	50
OTROS	200	30	170
Totales	500	200	300

Por tanto:

a) $P(OTROS \cap Chica) = \dfrac{170}{500} = 0,34$.

b) $P(PP / Chico) = \dfrac{120}{200} = 0,60$.

a) $P(Chica / OTROS) = \dfrac{170}{200} = 0,85$.

10. Baleares, junio 18
Opción B.

4. Considerem la població d'estudiants que han aprovat la selectivitat en la convocatòria de juny un any determinat. Sigui X la variable aleatòria que modela la proporció d'estudiants de la població anterior que escull estudiar un grau d'humanitats. Aquesta variable aleatòria X es modela amb una distribució normal de mitjana 0.35 i desviació típica 0.1. Es demana:

a) quina és la probabilitat que en un any qualsevol més del 45% dels estudiants de la població considerada estudiïn un grau d'humanitats? (5 punts)
b) En els darrers 10 anys, en quants anys el percentatge d'estudiants de la població considerada que han escollit estudiar un grau d'humanitats no ha superat el 30%? (5 punts)

Solución:
Se trata de una distribución normal $N(0{,}35,\ 0{,}1)$.
Se tipifica haciendo el cambio $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} = \dfrac{X-0{,}35}{0{,}1}$.

a) $P(X > 0{,}45) = P\left(Z > \dfrac{0{,}45-0{,}35}{0{,}1}\right) = P(Z > 1) = 1 - P(Z < 1) = 1 - 0{,}8413 = 0{,}1587$.

b) Para un año cualquiera:
$$P(X < 0{,}30) = P\left(Z < \dfrac{0{,}30-0{,}35}{0{,}1}\right) = P(Z < -0{,}5) = 1 - P(Z < 0{,}5) =$$
$= 1 - 0{,}6915 = 0{,}3085$.
Por tanto, cabría esperar que en 3 de los 10 años considerados ($10 \cdot 0{,}3085 = 3{,}085$) el porcentaje de estudiantes que eligió humanidades no superó el 30 %.

11. Baleares, septiembre 18
4A.

4. En una classe de segon de batxillerat, el 60% dels alumnes són al·lotes, el 40% varen aprovar Llengua Castellana i el 20% són al·lotes que varen aprovar Llengua Castellana. Es demana:

a) Quina és la probabilitat de trobar una persona que sigui al·lot i suspengui[1] Llengua Castellana? (5 punts)
b) Quina és la probabilitat que un al·lot suspengui Llengua Castellana? (2 punts)
c) Si un alumne ha aprovat Llengua Castellana, quina és la probabilitat que sigui un al·lot? (3 punts)

[1] Entenem per suspendre quan un alumne suspèn l'assignatura o no es presenta.

Solución:
Sean los sucesos:
Ser chica, $C \to P(C) = 0{,}60$; ser chico, H, $P(H) = 0{,}40$;
Aprobar Lengua Castellana, $A \to P(A) = 0{,}40$; suspender LC, S, $P(S) = 0{,}60$
Ser chica y aprobar $LC \to P(C \cap A) = 0{,}20$.

a) La probabilidad de que sea chico y suspenda Lengua Castellana será:

$$P(H\cap S)=P(S)-P(C\cap S)=0,60-\left(P(C)-P(C\cap A)\right)=0,60-(0,60-0,20)=0,20\,.$$

b) La probabilidad de que sea un chico suspenda Lengua Castellana será:

$$P(S/H)=\frac{P(H\cap S)}{P(H)}=\frac{0,20}{0,40}=0,50\,.$$

c) La probabilidad de que si un alumno aprueba Lengua Castellana sea chico es:

$$P(H/A)=\frac{P(H\cap A)}{P(A)}=\frac{0,20}{0,40}=0,50\,.$$

12. Baleares, septiembre 18

4B.

4. El nombre de passes que fa el professor Jaimito durant una hora de classe es modela amb una distribució normal de mitjana 100 passes i desviació típica 20.5 passes.

a) Calculau la probabilitat que el professor faci més de 125 passes durant una classe. (4 punts)

b) Ens diuen que en el 45% de les classes que fa el professor aquest fa menys de x passes. Trobau aquest valor x. (6 punts)

Solución:

Se trata de una distribución normal $N(100,\ 20{,}5)$.

Se tipifica haciendo el cambio $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}=\dfrac{X-100}{20,5}$.

a) $P(X>125)=P\left(Z>\dfrac{125-100}{20,5}\right)\approx P(Z>1,22)=1-P(Z<1,22)$ = 1 – 0,8888 = 0,1112.

b) Si nos dicen que en el 45 % de las clases el profesor hace menos de x pasos, entonces:

$$P(X<x)=0,45\Rightarrow P(X>x)=0,55\ \Rightarrow\ P\left(Z>\frac{x-100}{20,5}\right)=0,55\ \Rightarrow \text{(aproximando)}$$

$$\Rightarrow\ \frac{x-100}{20,5}=-0,125\Rightarrow x=97,4375\,.$$

→ Cantabria, junio y septiembre 18. No han puesto ningún problema de Probabilidad.

<u>**13**. Castilla y León, junio 18</u>

(Opción A) E5.- a) Se tira una moneda tres veces. Calcular la probabilidad de que, sin tener en cuenta el orden, salgan una cara y dos cruces. (1 punto)
b) Una persona elige al azar, sin verlas, dos cartas de una baraja española (de 40 cartas, de las cuales 10 son de cada uno de los 4 palos: oros, copas, espadas y bastos). Calcular la probabilidad de que ninguna de las dos cartas elegidas sea de copas. (1 punto)

<u>Solución</u>:

a) Designando por *C* es suceso cara y por *X* el suceso cruz, los casos posibles de tres tiradas de la moneda son:

CCX, *CCX*, *CXC*, *XCC*, *CXX*, *XCX*, *XXC*, *XXX*.

Por tanto, $P(1C, 2X) = \frac{3}{8}$.

b) Hay 30 cartas que no son de copas; si la primera carta extraída no es de copas, quedan 29 no copas de un total de 39 cartas. Por tanto:

$$P\left(1^{a}\,\overline{C} \cap 2^{a}\,\overline{C}\right) = \frac{30}{40} \cdot \frac{29}{39}.$$

<u>**14**. Castilla y León, junio 18</u>

(Opción B) E5.- La variable aleatoria IMC (índice de masa corporal, de modo abreviado) de las personas adultas de un determinado país sigue una distribución normal de media 26 y desviación típica de 6. Si tener un IMC superior a 35 significa ser obeso, encontrar la proporción de personas adultas obesas de ese país. (2 puntos)

<u>Solución</u>:

Se trata de una distribución normal *N*(26, 6).

Se tipifica haciendo el cambio $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 26}{6}$.

Con esto:

$$P(X > 35) = P\left(Z > \frac{35 - 26}{6}\right) = P(Z > 1{,}5) = 1 - P(Z < 1{,}5) = 1 - 0{,}9332 = 0{,}0668.$$

<u>**15**. Castilla y León, julio 18</u>

(Opción A) E5.- Se lanzan tres monedas al aire:
a) Halla el espacio muestral. (1 punto)
b) Halla la probabilidad de:
i) Obtener más caras que cruces. ii) Obtener las mismas caras que cruces. (1 punto)

<u>Solución</u>:

a) Designando por *C* el suceso cara y por *X* el suceso cruz, si se lanzan tres monedas al aire, el espacio muestral de resultados es:

E = {*CCX*, *CCX*, *CXC*, *XCC*, *CXX*, *XCX*, *XXC*, *XXX*}.

b) i) Los casos con más caras que cruces lo forma el suceso *A* = {*CCX*, *CCX*, *CXC*, *XCC*}; luego: $P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

ii) Al lanzar tres monedas al aire nunca se puede obtener las mismas caras que cruces, la probabilidad de tal suceso es 0.

16. Castilla y León, julio 18

(Opción B) E5.- El diámetro del interior de un anillo se distribuye normalmente con una media de 10 cm y una desviación típica de 0,03.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un anillo tenga un diámetro mayor de 10,075? (1 punto)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un anillo tenga un diámetro entre 9,97 y 10,03? (1 punto)

Solución:

Se trata de una distribución normal $N(10, 0{,}03)$.

Se tipifica haciendo el cambio $Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} = \dfrac{X-10}{0{,}03}$. Con esto:

a) $P(X > 10{,}075) = P\left(Z > \dfrac{10{,}075-10}{0{,}03}\right) = P(Z > 2{,}5) = 1 - P(Z < 2{,}5) =$

$= 1 - 0{,}9938 = 0{,}0062$.

b) $P(9{,}97 < X < 10{,}03) = P\left(\dfrac{9{,}97-10}{0{,}03} < Z < \dfrac{10{,}03-10}{0{,}03}\right) = P(-1 < Z < 1) =$

$= P(Z < 1) - P(Z < -1) = 0{,}8413 - (1 - 0{,}8413) = 0{,}6826$.

17. Castilla–La Mancha, junio 18

5A. a) Una planta industrial tiene tres máquinas. La máquina A produce 500 condensadores diarios, con un 3 % de defectuosos, la máquina B produce 700 con un 4 % de defectuosos y la C produce 800 con un 2 % de defectuosos. Al final del día se elige un condensador al azar.

a1) Calcula razonadamente la probabilidad de que sea defectuoso. (0,75 puntos)

a2) Si es defectuoso, calcula razonadamente la probabilidad de que haya sido producido por la máquina A. (0,5 puntos)

b) Lanzamos un dado perfecto cinco veces. Sea X la variable "Número de múltiplos de tres que pueden salir".

b1) Calcula razonadamente la media y la desviación típica de la variable X. (0,75 puntos)

b2) Calcula razonadamente la probabilidad de obtener cuatro o más múltiplos de tres. (0,5 puntos)

Solución:

a) Puede confeccionarse la siguiente tabla de producción:

Máquina	Producción	Defectuosos
A	500	(3 %) $\to$ 15
B	700	(4 %) $\to$ 28
C	800	(2 %) $\to$ 16
Totales	2000	59

a1) La letra D designa que el condensador es defectuoso.

$P(D) = \dfrac{59}{2000}$.

a2) De los 59 condensadores defectuosos 15 se han producido en la máquina A, luego:

$P(A/D) = \dfrac{15}{59}$.

b) Al lanzar un dado perfecto, la probabilidad de que salga un múltiplo de 3, sucesos 3 o 6, es $P\left(\dot{3}\right)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$.

El experimento de lanzar ese dado 5 veces y comprobar si sale un múltiplo de 3 se puede estudiar como una binomial $B\left(5,\ \dfrac{1}{3}\right) \to n = 5;\ p=\dfrac{1}{3};\ q=\dfrac{2}{3}$.

b1) Su media es $\mu = np \Rightarrow \mu = 5\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{5}{3}$.

Su desviación típica: $\sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{5\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{3}}=\dfrac{\sqrt{10}}{3}$.

b2) $P\left(X\geq 4\right)=P\left(X=4\right)+P\left(X=5\right)=\begin{pmatrix}5\\4\end{pmatrix}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^4\cdot\dfrac{2}{3}+\begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^5=\dfrac{10}{243}+\dfrac{1}{243}=\dfrac{11}{243}$.

18. Castilla–La Mancha, junio 18

5B. a) El 60 % del censo de una ciudad son mujeres. Las preferencias de las mujeres por los tres partidos que se presentan son: el 30 % vota a A, el 50 % a B y el resto a C; mientras que entre los hombres las preferencias son: el 10 % vota a A, el 60 % a B y el resto a C. Elegida al azar una persona del censo, calcula razonadamente la probabilidad de:

a1) Ser hombre y votante de C. (0,75 puntos)

a2) Si resultó ser votante de B, que sea mujer. (0,5 puntos)

b) Las notas que se han obtenido por 1000 opositores han seguido una distribución normal de media 4,05 y desviación típica 2,5.

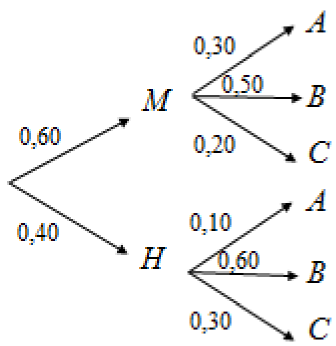
b1) ¿Cuántos opositores han superado el 5? Razona la respuesta. (0,75 puntos)

b2) Si tenemos que adjudicar 330 plazas, calcula razonadamente la nota de corte. (0,5 puntos)

Solución:

a) La situación se resume en el siguiente diagrama de árbol.

Las letras M y H indican ser mujer o ser hombre.



a1) $P\left(H\cap C\right)=P(H)\cdot P(C/H)$ = 0,40 · 0,30 = 0,12.

a2) Ser votante de B es:

$P\left(B\right)=P(M)\cdot P(B/M)+P(H)\cdot P\left(B/H\right)$ =

= 0,60 · 0,50 + 0,40 · 0,60 = 0,54.

Si resultó ser votante de B, que sea mujer es:

$P\left(M/B\right)=\dfrac{P\left(M\cap B\right)}{P(B)}=\dfrac{0,60\cdot 0,50}{0,54}=\dfrac{30}{54}=\dfrac{5}{9}$.

b) La distribución es una normal N(4,05, 2,5) → Se tipifica haciendo el cambio $Z=\dfrac{X-4,05}{2,5}$.

b1) $P\left(X>5\right)=P\left(Z>\dfrac{5-4,05}{2,5}\right)=P\left(Z>0,38\right)$ = $1-P\left(Z<0,38\right)$ = 1 – 0,6480 = 0,3520.

Luego 352 opositores (0,3520 · 1000 = 352) habrán superado el 5.

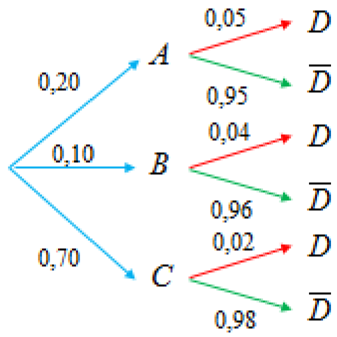
b2) Sea *n* la nota de corte. Se desea que:

$$P(X > n) = 0,33 \Rightarrow P(X < n) = 0,67 \Rightarrow P\left(Z < \frac{n-4,05}{2,5}\right) = 0,67 \Rightarrow \frac{n-4,05}{2,5} = 0,44 \Rightarrow$$

n = 5,15 puntos.

19. Castilla–La Mancha, julio 18

5A. a) En una tienda de lámparas tienen tres proveedores *A*, *B* y *C*. *A* suministra el 20 %, *B* el 10 % y *C* el resto. De las lámparas de *A* salen defectuosas el 5 %, de las de *B* el 4 % y de las de *C* el 2 %. Elegida una lámpara al azar de la tienda, calcula razonadamente la probabilidad de:
a1) No salgan defectuosas. (0,75 puntos)
a2) Si resultó defectuosa, que fuera suministrada por *B*. (0,5 puntos)
b) Una parte de un examen consta de cinco peguntas tipo test. Se aprueba dicha parte si contestas correctamente al menos tres preguntas. Calcula razonadamente la probabilidad de aprobar dicha parte, contestando al azar, cuando:
b1) Cada respuesta tiene dos ítems, solamente uno verdadero. (0,75 puntos)
b2) Cada respuesta tiene cuatro ítems, solamente uno verdadero. (0,5 puntos)
Solución:
a) Si D y $\overline{D}$ designa que la lámpara es defectuosa o no lo es, con los datos del problema puede confeccionarse el diagrama de árbol adjunto.



a1) $P(\overline{D}) = P(A) \cdot P(\overline{D}/A) + P(B) \cdot P(\overline{D}/B) + P(C) \cdot P(\overline{D}/C) =$
= 0,20 · 0,95 + 0,10 · 0,96 + 0,70 · 0,98 = 0,972.
Por tanto, $P(D) = 1 - 0,972 = 0,028$.

a2) $P(B/D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{0,10 \cdot 0,04}{0,028} = \frac{4}{28} = \frac{110}{265} \approx 0,143$.

b) Ambos casos se estudian como una binomial.
b1) La probabilidad de acertar es $P(V) = 0,5$; la de fallar, $P(F) = 0,5$.
El experimento en contestar cinco ítems al azar es una binomial *B*(5, 0,5).
Si *X* mide el número de aciertos, se tiene:

$$P(X \ge 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) =$$

$$= \binom{5}{3} \cdot 0,5^3 \cdot 0,5^2 + \binom{5}{4} \cdot 0,5^4 \cdot 0,5 + \binom{5}{5} \cdot 0,5^5 = 10 \cdot 0,03125 + 5 \cdot 0,03125 + 1 \cdot 0,03125 = 0,5.$$

b2) En este caso: $P(V) = 0,25$; la de fallar, $P(F) = 0,75$.
El experimento en contestar cinco ítems al azar es una binomial *B*(5, 0,25).
Luego,

$$P(X \ge 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) =$$

$$= \binom{5}{3} \cdot 0,25^3 \cdot 0,75^2 + \binom{5}{4} \cdot 0,25^4 \cdot 0,75 + \binom{5}{5} \cdot 0,25^5 = 10 \cdot \frac{9}{1024} + 5 \cdot \frac{3}{1024} + 1 \cdot \frac{1}{1024} \approx 0,104.$$

<u>**20**. Castilla–La Mancha, julio 18</u>

5B. a) En una clase el 80 % aprueba la asignatura de Biología, el 70 % aprueba la asignatura de Matemáticas y el 60 % aprueba Biología y Matemáticas.
a1) Si se elige un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que apruebe alguna de las asignaturas? (0,75 puntos)
a2) Si se elige un estudiante y ha aprobado Biología, ¿cuál es la probabilidad de que también haya aprobado Matemáticas? (0,5 puntos)
b) Un dispensador de cierto refresco está regulado de manera que cada vez descargue 25 cl de media. Si la cantidad de líquido dispensado sigue una distribución normal de varianza 4:
b1) Calcula razonadamente la probabilidad de que descargue entre 22 y 28 cl. (0,75 puntos)
b2) Calcula razonadamente la capacidad mínima de los vasos que se usen, redondeada a cl, para que la probabilidad de que se derrame el líquido sea inferior al 2,5 %. (0,5 puntos)

<u>Solución</u>:

a) Sean B y M los sucesos aprobar Biología y Matemáticas, respectivamente. Se sabe que:
$P(B)=0,80$, $P(M)=0,70$; $P(B\cap M)=0,60$.

a) Como $P(B\cup M)=P(B)+P(M)-P(B\cap M) \Rightarrow$
$P(B\cup M)=0,80+0,70-0,60=0,90$.
El 90 % de los alumnos aprueba alguna de las dos asignaturas.

a2) $P(M/B)=\dfrac{P(B\cap M)}{P(B)}=\dfrac{0,60}{0,80}=\dfrac{3}{14}=0,75$.
El 75 % de los alumnos que han aprobado Biología también han aprobado Matemáticas.

b) Si la varianza es 4 ⇒ σ = 2. La distribución es una normal $N(25, 2)$ → Se tipifica haciendo el cambio $Z=\dfrac{X-25}{2}$.

b1) $P(22<X<28)=P(X<28)-P(X<22)=P\left(Z<\dfrac{28-25}{2}\right)-P\left(Z<\dfrac{22-25}{2}\right)=$
$P(Z<1,5)-P(Z<-1,5)$ = 0,9332 – (1– 0,9332) = 0,8664.

b2) Sea c la capacidad mínima buscada. Se desea que el 97,5 % de las descargas del refresco no se derrame; luego, debe cumplirse que:
$P(X<c)=0,975 \Rightarrow P\left(Z<\dfrac{c-25}{2}\right)=0,975 \Rightarrow \dfrac{c-25}{2}=1,96 \Rightarrow c$ = 28,92 cl.

→ <u>Cataluña, junio y septiembre18. No han puesto ningún problema de Probabilidad.</u>

→ <u>Comunidad Valenciana, junio y julio 18. No se ha propuesto ningún problema de Probabilidad.</u>

21. Extremadura, junio 2018

4.- En una red social el 55 % lee noticias deportivas, el 65 % lee noticias de información, y el 10 % no lee las noticias deportivas ni las de información. Tomando al azar una persona de esta red social:

(a) calcule la probabilidad de que lea noticias deportivas o de información. (0,5 puntos)

(b) sabiendo que lee noticias de información, calcule la probabilidad de que también lea noticias de deportes. (0,5 puntos)

(c) sabiendo que lee noticias de deportes, calcule la probabilidad de que no lea noticias de información. (0,5 puntos)

Solución:

Sean los sucesos: D = “leer noticias deportivas”; I = “leer noticias de información”.

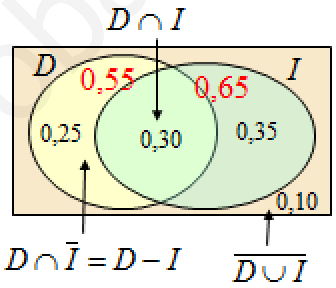
→ $D \cup I$ será el suceso “leer noticias deportivas o de información”;

→ su contrario, no leer noticias deportivas ni de información, puede denotarse por $\overline{D \cup I}$.

Se conocen las siguientes probabilidades:

$$P(D) = 0,55,\ P(I) = 0,65;\ P\left(\overline{D \cup I}\right) = 0,10 \Rightarrow P\left(D \cup I\right) = 1 - P\left(\overline{D \cup I}\right) = 0,90.$$

Puede hacerse el diagrama de Venn adjunto.



a) Como ya se ha dicho, la probabilidad de que lea noticias deportivas o de información es $P\left(D \cup I\right) = 0,90$.

b) Por la probabilidad de la unión de sucesos:

$$P\left(D \cup I\right) = P(D) + P(I) - P\left(D \cap I\right) \Rightarrow$$

$$0,90 = 0,55 + 0,65 - P\left(D \cap I\right) \Rightarrow P\left(D \cap I\right) = 0,30.$$

Por la probabilidad condicionada,

$$P\left(D / I\right) = \frac{P\left(D \cap I\right)}{P(I)} = \frac{0,30}{0,65} = \frac{30}{65} \approx 0,46.$$

c) Igualmente:

$$P\left(\bar{I} / D\right) = \frac{P\left(D \cap \bar{I}\right)}{P(D)} = \frac{0,25}{0,55} = \frac{25}{55} \approx 0,45.$$

22. Extremadura, junio 2018

4.- A una prueba de oposición se han presentado 2500 aspirantes para 300 plazas. Las calificaciones que han obtenido los aspirantes tienen una distribución normal de media 6,5 y desviación típica 2. Calcule:

(a) la nota de corte para los admitidos. (0,75 puntos)

(b) la probabilidad de que un alumno elegido al azar tenga una nota mayor de 9. (0,75 puntos)

Solución:

Como aprueban 300 de los 2500 aspirantes, la probabilidad de que apruebe un opositor elegido al azar es $\frac{300}{2500} = 0,12 \Rightarrow$ aprobarán el 12 % de los presentados: los que obtengan una nota por encima del percentil 88.

Las notas se distribuyen normalmente: $N(6,5,\ 2)$.

→ Se tipifica haciendo el cambio $Z = \frac{X - 6,5}{2}$.

a) Si n es la nota de corte para los admitidos, entonces, el 88 % de las notas están por debajo de n.

$$P(X<n)=0{,}88 \Rightarrow P\left(Z<\frac{c-6{,}5}{2}\right)=0{,}88 \Rightarrow \frac{n-6{,}5}{2}=1{,}175 \Rightarrow n=8{,}85.$$

(El valor $Z = 1{,}175$ se obtiene por interpolación).

b) $P(X>9)=1-P(X<9)=1-P\left(Z<\frac{9-6{,}5}{2}\right)=1-P(Z<1{,}25) = 1 - 0{,}8944 = 0{,}1056.$

__23__. Extremadura, julio 2018

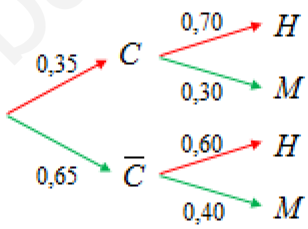
4.- En un centro comercial el 35 % de los clientes utiliza carro. El 70 % de los que utilizan carro son hombres y el 40 % de los que no utilizan carro son mujeres.

(a) Calcule la probabilidad de que un cliente elegido al azar sea mujer. (0,75 puntos)

(b) Sabiendo que un cliente elegido al azar ha sido hombre, que probabilidad hay de que utilice carro. (0,75 puntos)

Solución:

Con los datos del problema puede hacerse el diagrama de árbol adjunto.



Los sucesos y probabilidades son:

C = el cliente usa carro $\to P(C)=0{,}35$;

$\overline{C}$ = el cliente no usa carro $\to P(\overline{C})=0{,}65$.

Los sucesos hombre o mujer se denotan por H o M, respectivamente.

Las demás probabilidades son las que se indican en el diagrama.

Con esto:

a) P(un cliente sea mujer) = $P(C)\cdot P(M/C)+P(\overline{C})\cdot P(M/\overline{C})$ =

= 0,35 · 0,30 + 0,65 · 0,40 = 0,365.

Se deduce que P(un cliente sea hombre) = 1 – 0,365 = 0,635.

b) Por la probabilidad condicionada,

$$P(C/H)=\frac{P(C\cap H)}{P(H)}=\frac{0{,}35\cdot 0{,}70}{0{,}635}=\frac{245}{635}\approx 0{,}39.$$

__24__. Extremadura, julio 2018

4.- Se estima que en una partida de bombillas el 10 % son defectuosas. Si se eligen al azar 6 bombillas de esta partida, calcule:

(a) la probabilidad de que ninguna sea defectuosa. (0,5 puntos)

(b) la probabilidad de obtener más de 2 defectuosas. (0,5 puntos)

(c) la media y la desviación típica de la distribución. (0,5 puntos)

Solución:

Se trata de un experimento binomial: $B(6, 0{,}1)$.

0,1 es la probabilidad de que una sea defectuosa: $p = 0{,}1$; $q = 0{,}9$.

Si X mide el número de bombillas defectuosas, se tendrá:

a) $P(X=0)=\binom{6}{0}\cdot 0,1^0\cdot 0,9^6=0,9^6=0,531441$.

b) $P(X\geq 3)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)=$

$=\binom{6}{3}\cdot 0,1^3\cdot 0,9^3+\binom{6}{4}\cdot 0,1^4\cdot 0,9^2+\binom{6}{5}\cdot 0,1^5\cdot 0,9+\binom{6}{6}\cdot 0,1^6=$

$= 20\cdot 0,000729 + 15\cdot 0,000081 + 6\cdot 0,000009 + 1\cdot 0,000001 = 0,01585$.

c) La media de una distribución binomial es: $\mu=np \to \mu = 6\cdot 0,1 = 0,6$.

La desviación típica es: $\sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{6\cdot 0,1\cdot 0,9}=\sqrt{0,54}\approx 0,7348$.

<u>**25**. Galicia, junio 18</u>

Ejercicio 4A (2 puntos)

En las rebajas de unos grandes almacenes están mezcladas y a la venta 200 bufandas de la marca A, 150 de la marca B y 50 de la marca C. La probabilidad de que una bufanda de la marca A sea defectuosa es 0,01; 0,02 si es de la marca B y 0,04 si es de la marca C. Una persona elige una bufanda al azar:

a) Calcula la probabilidad de que la bufanda elegida sea de la marca A o defectuosa.

b) Calcula la probabilidad de que la bufanda elegida no sea defectuosa ni de la marca C.

c) Si la bufanda elegida no es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la marca B?

<u>Solución</u>:

Con los datos del problema puede hacerse la siguiente tabla de contingencia:

Bufanda	Marca A	Marca B	Marca C	Total
Número	200	150	50	400
Defectuosas	$0,01\cdot 200 = 2$	$0,02\cdot 150 = 3$	$0,04\cdot 50 = 2$	7
No defectuosas	198	147	48	393

a) De la marca A o defectuosas hay 205 bufandas: las 200 de A más las 5 defectuosas de B o C. Por tanto:

$$P(A\cup D)=\frac{205}{400}=\frac{41}{80}.$$

b) No defectuosa ni de la marca C hay 345 bufandas (198 de A + 147 de B). Por tanto:

$$P(\overline{D}\cap\overline{C})=\frac{345}{400}=\frac{69}{80}.$$

c) De las 393 bufandas no defectuosas, 147 son de la marca B. Por tanto:

$$P(B/\overline{D})=\frac{147}{393}.$$

26. Galicia, junio 18

Ejercicio 4B (2 puntos)

a) Un examen tipo test consta de 10 preguntas, cada una con 4 respuestas de las cuales solo una es correcta. Si se contesta al azar, ¿cuál es la probabilidad de contestar bien al menos dos preguntas?

b) La duración de un cierto tipo de pilas eléctricas es una variable que sigue una distribución normal de media 50 horas y desviación típica 5 horas. Calcula la probabilidad de que una pila eléctrica de este tipo, elegida al azar, dure menos de 42 horas.

Solución:

a) Se trata de un experimento binomial: $B(10,\ 0{,}25)$.

0,25 es la probabilidad de contestar bien: $p = 0{,}25 \to q = 0{,}75$.

Si X mide el número de preguntas contestadas correctamente, se tendrá:

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - \binom{10}{0} \cdot 0{,}25^0 \cdot 0{,}75^{10} - \binom{10}{1} \cdot 0{,}25^1 \cdot 0{,}75^9 =$$

$$= 1 - 0{,}75^{10} - 10 \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}75^9 = 1 - 0{,}24402523 = 0{,}755974769.$$

b) Se trata de una normal: $N(50,\ 5)$. Se tipifica haciendo el cambio $Z = \dfrac{X - 50}{5}$.

Luego:

$$P(X < 42) = P\left(Z < \frac{42 - 50}{5}\right) = P(Z < -1{,}6) = 1 - P(Z < 1{,}6) = 1 - 0{,}9452 = 0{,}0548.$$

27. Galicia, septiembre 18

Ejercicio 4A (2 puntos)

4. En un bombo tenemos 10 bolas idénticas numeradas del 0 al 9 y cada vez que hacemos una extracción devolvemos la bola al bombo.

a) Si hacemos 5 extracciones, calcula la probabilidad de que el 7 salga menos de dos veces.

b) Si hacemos 100 extracciones, calcula la probabilidad de que el 7 salga menos de 9 veces.

Solución:

a) El experimento puede estudiarse como una binomial: $B(5,\ 0{,}1)$.

0,1 es la probabilidad de que salga la bola numerada con el 7: $p = 0{,}1 \to q = 0{,}9$.

Si X mide el número de veces que sale la bola 7 en 5 extracciones, se tendrá:

$$P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = \binom{5}{0} \cdot 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^5 + \binom{5}{1} \cdot 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^4 =$$

$$= 0{,}9^5 - 5 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9^4 = 1 - 0{,}59049 - 0{,}32805 = 1 - 0{,}91854 = 0{,}08146.$$

b) Si se hacen 100 extracciones, la $B(100,\ 0{,}1)$ puede estudiarse como una normal de media $\mu = 100 \cdot 0{,}1 = 10$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} = \sqrt{9} = 3$: $N(10,\ 3)$.

Esta normal se tipifica haciendo el cambio: $Z = \dfrac{X - 10}{3}$.

Con esto:

$$P(X < 9) = P(X' \leq 8{,}5) = P\left(Z < \frac{8{,}5 - 10}{3}\right) = P(Z < -0{,}5) = 1 - P(Z < 0{,}5) =$$

$$= 1 - 0{,}6915 = 0{,}3085.$$

(Se ha realizado la corrección de continuidad).

<u>**28**. Galicia, septiembre 18</u>

Ejercicio 4B (2 puntos)

4. En una fábrica hay tres máquinas A, B y C que producen la misma cantidad de piezas. La máquina A produce un 2 % de piezas defectuosas, la B un 4 % y la C un 5 %.

a) Calcula la probabilidad de que una pieza elegida al azar sea defectuosa.

b) Si se elige una pieza al azar y resulta que no es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada por la máquina A?

<u>Solución</u>:

La probabilidad de que una pieza sea producida por alguna de las máquinas A, B y C es:

$$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{3}.$$

Las probabilidades de que sean defectuosas son:

$$P(D/A)=0,02;\ P(D/B)=0,04;\ P(D/C)=0,05.$$

a) Por la probabilidad total:

$$P(D)=P(A)\cdot P(D/A)+P(B)\cdot P(D/B)+P(C)\cdot P(D/C)=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot(0,02+0,04+0,05)=\frac{11}{300}\approx 0,037.$$

b) La probabilidad de que una pieza no sea defectuosa es $P(\overline{D})=1-P(D)=1-\frac{11}{300}=\frac{289}{300}$.

La probabilidad de la máquina A produzca una pieza no defectuosa es: $P(\overline{D}/A)=0,98$.

Por la probabilidad condicionada:

$$P(A/\overline{D})=\frac{P(A)\cdot P(\overline{D}/A)}{P(\overline{D})}=\frac{\frac{1}{3}\cdot 0,98}{\frac{289}{300}}=\frac{98}{289}\approx 0,34.$$

<u>**29**. Islas Canarias, junio 18</u>

4A.- Se sabe que el 30 % de todos los fallos en las tuberías de plantas químicas son ocasionados por errores del operador.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que, de 20 fallos en una planta química, exactamente 5 se deban a errores del operador? (1,25 puntos)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que 2 o más fallos de 20 encontrados en una planta química, se deban a errores del operador? (1,25 puntos)

<u>Solución</u>:

a) El experimento puede estudiarse como una binomial: $B(20,\ 0,3)$.

0,3 es la probabilidad de fallo por error del operador en una tubería: $p = 0,3 \to q = 0,7$.

Si X mide el número de veces que el fallo es debido al operador, entonces, si hay 20 fallos:

$$P(X=5)=\binom{20}{5}\cdot 0,3^5\cdot 0,7^{15}=\frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot 0,3^5\cdot 0,7^{15}=15504\cdot 0,3^5\cdot 0,7^{15}=0,17886305.$$

b) $P(X\geq 2)=1-P(X=0)-P(X=1)=1-\binom{20}{0}\cdot 0,3^0\cdot 0,7^{20}-\binom{20}{1}\cdot 0,3^1\cdot 0,7^{19}=$

$= 1 - 0,7^{20} - 20\cdot 0,3\cdot 0,7^{19} = 1 - 0,0007979 - 0,0068393 = 0,9923628.$

30. Islas Canarias, junio 18

4B.- El 75 % de los alumnos de un instituto acude a clase en algún tipo de transporte y el resto acude andando. Por otra parte, llegan puntual a clase el 60 % de los que utilizan transporte y el 90 % de los que acuden andando. Se pide:

a) Si se elige un alumno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no haya llegado puntual a clase? (1,25 puntos)

b) Si se elige al azar uno de los alumnos que ha llegado puntual a clase, ¿cuál es la probabilidad de que haya acudido andando? (1,25 puntos)

Solución:

Puede hacerse un diagrama de árbol o una tabla de contingencia como la que sigue (para evitar decimales puede partirse de que hay 1000 alumnos en ese instituto):

	Transporte (75 %)	Andando (25 %)	Total
Alumnos (1000)	$1000 \cdot 0{,}75 = 750$	$1000 \cdot 0{,}25 = 250$	1000
Puntuales	(60 %) $\to 0{,}6 \cdot 750 = 450$	(90 %) $\to 0{,}9 \cdot 250 = 225$	675
Llegan tarde	300	25	325

Con esto:

a) De los 1000 alumnos, 325 no llegan puntuales, luego:

$$P(\text{no puntual}) = \frac{325}{1000} = 0{,}325.$$

b) De los 675 alumnos puntuales 225 han acudido andando, luego:

$$P(\text{andado/puntual}) = \frac{225}{675} = \frac{1}{3}.$$

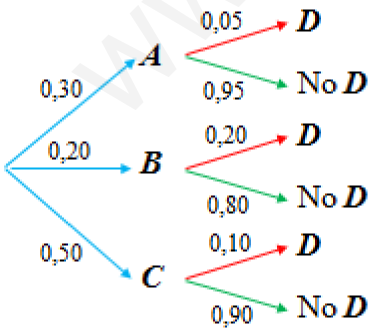
31. Islas Canarias, julio 18

4.- Tres fábricas A, B y C, producen respectivamente el 30 %, 20 % y 50 % de los motores agrícolas que se demandan en la industria. Los inspectores de calidad saben que son defectuosos el 5 % de los motores producidos por la fábrica A, el 20 % de los producidos por la fábrica B y el 10 % de los que se fabrican en la C.

a) Un inspector de calidad elige un motor al azar, ¿Cuál es la probabilidad de que esté defectuoso? (1,25 puntos)

b) Si el inspector comprueba que el motor agrícola que elige está defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que no haya sido producido por la fábrica C? (1,25 puntos)

Solución:



Con los datos del problema se obtiene el diagrama de árbol de la izquierda.

a) Por la probabilidad total:

$$P(D) = P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C) =$$

$= 0{,}30 \cdot 0{,}05 + 0{,}20 \cdot 0{,}20 + 0{,}50 \cdot 0{,}10 = 0{,}105.$

b) Por la probabilidad condicionada:

$$P(C/D) = \frac{P(C) \cdot P(D/C)}{P(D)} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}10}{0{,}105} = \frac{50}{105} = \frac{10}{21}.$$

Luego, la probabilidad de que si es defectuoso no haya producido por la fábrica C será la contraria:

$$P\left(A\cup B/D\right)=1-P\left(C/D\right)=1-\frac{50}{105}=\frac{55}{105}=\frac{11}{21}.$$

<u>**32**. Islas Canarias, julio 18</u>
4.- El 30 % de los habitantes de un determinado pueblo ve un concurso de televisión. Desde el concurso se llama por teléfono a 10 personas del pueblo elegidas al azar. Calcular la probabilidad de que, de las 10 personas elegidas, estuvieran viendo el concurso de televisión:
a) Tres o menos personas. (1,5 puntos)
b) Ninguna de las 10 personas a las que se ha llamado. (1 punto)
<u>Solución</u>:
El experimento puede estudiarse como una binomial: $B(10,\ 0{,}3)$.
0,3 es la probabilidad de ver el concurso: $p = 0{,}3 \rightarrow q = 0{,}7$.
Si X mide el número de personas que ve el concurso, si se eligen 10 personas al aza, entonces:
a) $P\left(X\leq 3\right)=P\left(X=0\right)+P\left(X=1\right)+P\left(X=2\right)+P\left(X=3\right)=$

$$=\binom{10}{0}\cdot 0{,}3^0\cdot 0{,}7^{10}+\binom{10}{1}\cdot 0{,}3^1\cdot 0{,}7^9+\binom{10}{2}\cdot 0{,}3^2\cdot 0{,}7^8+\binom{10}{3}\cdot 0{,}3^3\cdot 0{,}7^7=$$

$= 0{,}7^{10} + 10\cdot 0{,}3\cdot 0{,}7^9 + 45\cdot 0{,}3^2\cdot 0{,}7^8 + 120\cdot 0{,}3^3\cdot 0{,}7^7 =$
$= 0{,}0282475 + 0{,}1210608 + 0{,}2334744 + 0{,}2668279 = 0{,}6496107$.

Recuérdese que $\binom{n}{r}=\dfrac{n!}{r!\cdot(n-r)!}$; así, por ejemplo: $\binom{10}{3}=\dfrac{10!}{3!\cdot 7!}=\dfrac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1}=120$.

b) $P\left(X=0\right)=\binom{10}{0}\cdot 0{,}3^0\cdot 0{,}7^{10}=0{,}0282475$.

<u>**33**. La Rioja, junio 18</u>
2.- (3 puntos) En una empresa frutícola, la producción por árbol sigue una distribución normal de media 54,3 kg y desviación típica 6,5 kg.
1. ¿Cuál es el porcentaje de árboles que producen más de 57 kg?
2. ¿Qué porcentaje de árboles producen entre 50 y 57 kg?
3. Si se escoge al azar un árbol que está dentro del 70 % de los árboles que menos producen, ¿a lo sumo cuántos kilogramos debería producir?
<u>Solución</u>:
La distribución es una normal $N(54{,}3,\ 6{,}5)$ → Se tipifica haciendo el cambio $Z=\dfrac{X-54{,}3}{6{,}5}$.

1) $P\left(X>57\right)=P\left(Z>\dfrac{57-54{,}3}{6{,}5}\right)=P\left(Z>0{,}415\right)=1-P\left(Z<0{,}415\right)\approx 1-0{,}6609=0{,}3391$.

2) $P\left(50<X<57\right)=P\left(X<57\right)-P\left(X<50\right)=P\left(Z<\dfrac{57-54{,}3}{6{,}5}\right)-P\left(Z<\dfrac{50-54{,}3}{6{,}5}\right)=$

$=P\left(Z<0{,}415\right)-P\left(Z<-0{,}66\right)=0{,}6609-\left(1-P\left(Z<0{,}66\right)\right)=0{,}6609-0{,}2546=0{,}4063$.

3) Sea k la producción mínima buscada. Se desea que el 70 % de los árboles produzcan menos de k kg; luego, debe cumplirse que:

$$P\left(X<k\right)=0{,}70\Rightarrow P\left(Z<\frac{k-54{,}3}{6{,}5}\right)=0{,}70\Rightarrow\frac{k-54{,}3}{6{,}5}=0{,}525\Rightarrow k=57{,}7\text{ kg}.$$

34. La Rioja, junio 18 (B)

1.- (2 puntos) Una mujer, que sospecha estar embarazada, acude a la consulta del médico. Al examinarla cuidadosamente, el médico cree que está embarazada con una probabilidad de 0,6. Para confirmar el diagnóstico, el médico encarga un test que da negativo en el 4 % de los casos que la mujer está realmente embarazada, mientras que el test da positivo en el 5 % de los casos en los que la mujer no está embarazada. Calcule la probabilidad de que:

(I) El test dé positivo.

(II) La mujer esté embarazada sabiendo que el test da positivo.

Solución:

Sean los sucesos:

E = estar embarazada; $\overline{E}$ = no estar embarazada;

[+] y [–] dar positivo o negativo en el test.

Se sabe que:

$$P(E)=0,6 \to P\left(\overline{E}\right)=0,4;\ P([-]/E)=0,04 \to P([+]/E)=0,96;\ P\left([+]/\overline{E}\right)=0,05.$$

(I) Por la probabilidad total:

$$P([+])=P(E)\cdot P([+]/E)+P\left(\overline{E}\right)\cdot P\left([+]/\overline{E}\right) = 0,6 \cdot 0,96 + 0,4 \cdot 0,05 = 0,596.$$

(II) Por Bayes:

$$P(E/[+])=\frac{P(E)\cdot P([+]/E)}{P([+])}=\frac{0,6\cdot 0,96}{0,596}=\frac{576}{596}\approx 0,97.$$

35. La Rioja, julio 18 (A y B)

3.- (2 puntos) El número de vuelos que llega a un aeropuerto por la mañana es de 140, por la tarde, 200, y por la noche, 40. El porcentaje de vuelos que se retrasan por la mañana es del 2 %, por la tarde del 4 % y por la noche, de un 6 %.

(I) Calcule la probabilidad de que no se retrase un vuelo con destino a ese aeropuerto.

(II) Si un vuelo llegó con retraso a ese aeropuerto, ¿cuál es la probabilidad de que fuera un vuelo de la tarde?

Solución:

Con los datos del problema se puede construir la siguiente tabla de contingencia.

Vuelos	Número	Con retraso (R)	Sin retraso $\left(\overline{R}\right)$
Mañana (M)	140	(2 %) $\to$ 2,8	137,2
Tarde (T)	200	(4 %) $\to$ 8	192
Noche (N)	40	(6 %) $\to$ 2,4	37,6
Totales	380	13,2	366,8

Atendiendo a los datos de la tabla:

(I) $P\left(\overline{R}\right)=\dfrac{366,8}{380}\approx 0,965.$

(II) $P(T/R)=\dfrac{8}{13,2}\approx 0,606.$

36. Madrid, junio 18

Ejercicio 4A: **Calificación máxima:** 2,5 puntos.

El 60 % de las ventas en unos grandes almacenes corresponden a artículos con precios rebajados. Los clientes devuelven el 15 % de los artículos que compran rebajados, porcentaje que disminuye al 8 % si los artículos han sido adquiridos sin rebajas.

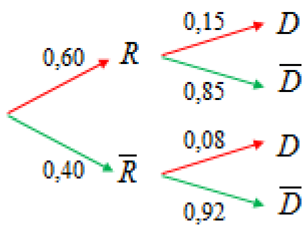
a) (1,25 puntos) Determine el porcentaje global de artículos devueltos.

b) (1,25 puntos) ¿Qué porcentaje de artículos devueltos fueron adquiridos con precios rebajados?

Solución:

Sean R y $\overline{R}$ los sucesos "artículo rebajado" y "no rebajado", respectivamente. Y sean D y $\overline{D}$ los sucesos "los clientes devuelven un artículo comprado" y "ni lo devuelven", también respectivamente.

Atendiendo a los datos del enunciado se puede formar el siguiente diagrama de árbol.



a) La probabilidad de que un artículo sea devuelto es:

$$P(D) = P(R)\cdot P(D/R) + P(\overline{R})\cdot P(D/\overline{R}) =$$

$= 0,60 \cdot 0,15 + 0,40 \cdot 0,08 = 0,122.$

El 12,2 % de los artículos será devuelto.

b) La probabilidad de que un artículo devuelto fuese adquirido a precios rebajados es:

$$P(R/D) = \frac{P(R)\cdot P(D/R)}{P(D)} = \frac{0,60\cdot 0,15}{0,122} = \frac{90}{122} \approx 0,738$$ → El 73,8 % de los artículos devueltos se compró a precios rebajados.

37. Madrid, junio 18

Ejercicio 4B: **Calificación máxima:** 2,5 puntos.

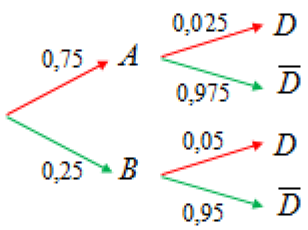
En una fábrica se elaboran dos tipos de productos: A y B. El 75 % de los productos fabricados son de tipo A y el 25 % de tipo B. Los productos de tipo B salen defectuosos un 5 % de las veces, mientras que los de tipo A salen defectuosos un 2,5 % de las veces.

a) (1 punto) Si se fabrican 5000 productos en un mes, ¿cuántos de ellos se espera que sean defectuosos?

b) (1,5 puntos) Un mes, por motivos logísticos, se cambió la producción, de modo que se fabricaron exclusivamente productos de tipo A. Sabiendo que se fabricaron 6000 unidades, determinar, aproximando la distribución por una normal, la probabilidad de que haya más de 160 unidades defectuosas.

Solución:

El diagrama de árbol asociado es el siguiente.



a) La probabilidad de que un producto salga defectuoso es:

$$P(D) = P(A)\cdot P(D/A) + P(B)\cdot P(D/B) =$$

$= 0,75 \cdot 0,025 + 0,25 \cdot 0,05 = 0,03125.$

Si se fabrican 5000 hay que esperar que el número de productos defectuosos sea $5000 \cdot 0,03125 = 156,25$.

b) La distribución inicial es una binomial $B(6000,\ 0,025) \to n = 6000$; $p = 0,025$, $q = 0,975$.

Se puede estudiar como la normal $N\left(np, \sqrt{npq}\right)$, que se tipifica haciendo el cambio $Z = \dfrac{X - np}{\sqrt{npq}}$.

En este caso, la normal será $N\left(6000 \cdot 0,025,\ \sqrt{6000 \cdot 0,025 \cdot 0,975}\right) \to N(150,\ 12,09)$.

Con esto:

$$P(X > 160) = P\left(Z > \frac{160-150}{12,09}\right) = P(Z > 0,827) = 1 - P(Z < 0,827) =$$
$= 1 – 0,7967 = 0,2033.$

→ Si se hace la corrección de continuidad, entonces:

$$P(X > 160) = P(X' > 160,5) = P\left(Z > \frac{160,5-150}{12,09}\right) = P(Z > 0,87) = 1 - P(Z < 0,87) =$$
$= 1 – 0,8078 = 0,1922.$

<u>**38**. Madrid, julio 18</u>

Ejercicio 4A: **Calificación máxima**: 2,5 puntos.

Según los datos de la Fundación para la Diabetes, el 13,8 % de los españoles mayores de 18 años tiene diabetes, aunque el 43 % de ellos no sabe que la tiene. Se elige al azar un español mayor de 18 años.

a) (1 punto) ¿Cuál es la probabilidad de que sea diabético y lo sepa?, ¿cuál la de que no sea diabético o no sepa que lo es?

b) (1,5 puntos) Cierto test diagnostica correctamente el 96 % de los casos positivos de diabetes, pero da un 2 % de falsos positivos. Si un español mayor de 18 años da positivo en el test, ¿cuál es la probabilidad de que realmente sea diabético?

<u>Solución</u>:

a) Si P(No saberlo si es diabético) = 0,43 ⇒ P(Saberlo si es diabético) = 0,57.

Con esto:

P(ser diabético y saberlo) = P(ser diabético) · P(saberlo si se es diabético) =
= 0,138 · 0,57 = 0,07866 → 7,866 %.

P(no ser diabético o no saberlo) = 1 − P(ser diabético y saberlo) = 1 − 0,07866 = 0,92134.

b) Sean los sucesos:

D = ser diabético; $\overline{D}$ = no ser diabético.

Se sabe que:

$$P(D) = 0,138 \to P\left(\overline{D}\right) = 0,862.$$

Según el test:

$$P([+]/D) = 0,96;\ P\left([+]/\overline{D}\right) = 0,02.$$

Por la probabilidad total:

$$P([+]) = P(D) \cdot P([+]/D) + P\left(\overline{D}\right) \cdot P\left([+]/\overline{D}\right) = 0,138 \cdot 0,96 + 0,862 \cdot 0,02 = 0,14972.$$

Por Bayes:

$$P(D/[+]) = \frac{P(D) \cdot P([+]/D)}{P([+])} = \frac{0,138 \cdot 0,96}{0,14972} = \frac{0,13248}{0,14972} = 0,88485.$$

39. Madrid, julio 18
Ejercicio 4B: **Calificación máxima**: 2,5 puntos.
La variable aleatoria *X* sigue una distribución normal de media μ = 8,5 y desviación típica σ = 2,5. Se pide:
a) (1,25 puntos) Calcular el valor a tal que $P(X \le a) = 0,05$.
b) (1,25 puntos) Calcular la probabilidad de que la variable tome un valor comprendido entre 8 y 9,3.
Solución:
La distribución es una normal *N*(8,5, 2,5) → Se tipifica haciendo el cambio $Z = \dfrac{X - 8,5}{2,5}$.

a) $P(X \le a) = 0,05 \Rightarrow P\left(Z \le \dfrac{a - 8,5}{2,5}\right) = 0,05 \Rightarrow \dfrac{a - 8,5}{2,5} = -1,645 \Rightarrow a = 4,3875.$

b) $P(8 < X < 9,3) = P(X < 9,3) - P(X < 8) = P\left(Z < \dfrac{9,3 - 8,5}{2,5}\right) - P\left(Z < \dfrac{8 - 8,5}{2,5}\right) =$
$= P(Z < 0,32) - P(Z < -0,2) = 0,6255 - (1 - P(Z < 0,2))$ = 0,6255 – 0,4207 = 0,2048.

40. Murcia, junio 18
CUESTIÓN A.5: Una máquina funciona en modo automático el 70 % de los días y el resto de los días funciona en modo manual. La probabilidad de que tenga un fallo cuando funciona en modo automático es 0,15. La probabilidad de que tenga un fallo cuando funciona en modo manual es 0,05.
a) [0,75 p.] Calcule la probabilidad de que no tenga ningún fallo.
b) [0,75 p.] Si un día tiene un fallo, ¿cuál es la probabilidad de que haya funcionado en modo manual?
Solución:
Sean los sucesos:
A = “la máquina funciona en modo automático” → $P(A) = 0,70$;
M = “la máquina funciona en modo manual” → $P(M) = 0,30$;
F = “la máquina tiene un fallo” → $P(F/A) = 0,15$; $P(F/M) = 0,05$.
$\overline{F}$ = “la máquina no tiene un fallo” → $P(\overline{F}/A) = 0,85$; $P(\overline{F}/M) = 0,95$.

Con esto:
a) Por la probabilidad total:
$P(\overline{F}) = P(A) \cdot (\overline{F}/A) + P(M) \cdot P(\overline{F}/M)$ = 0,70 · 0,85 + 0,30 · 0,95 = 0,88.

b) La probabilidad de que tenga un fallo será $P(F) = 1 - P(\overline{F}) = 1 - 0,88 = 0,12$.
Por la probabilidad condicionada:
$$P(M/F) = \frac{P(M) \cdot P(F/M)}{P(F)} = \frac{0,30 \cdot 0,05}{0,12} = \frac{15}{120} = 0,125.$$

41. Murcia, junio 18
CUESTIÓN B.5: En una peña del Atlético de Madrid, el 70 % de sus miembros prefiere que Antoine Griezmann continúe jugando en el equipo durante la próxima temporada, el 50 % prefiere que Fernando Torres continúe jugando en el equipo la próxima temporada y el 30 % prefiere que ambos jugadores sigan jugando en el equipo en la próxima temporada. Elegido al azar un miembro de la peña, se pide:
a) [0,5 p.] ¿Cuál es la probabilidad de que prefiera que al menos alguno de los dos jugadores siga jugando en el equipo la próxima temporada?
b) [0,5 p.] ¿Cuál es la probabilidad de que prefiera que ninguno de los dos jugadores siga jugando en el equipo la próxima temporada?
c) [0,5 p.] ¿Cuál es la probabilidad de que prefiera que solo Fernando Torres siga jugando en el equipo la próxima temporada?
Solución:
Sean los sucesos:
AG = "Antoine Griezmann continúe jugando…" $\to$ $P(AG)=0,70$;
FT = "Fernando Torres continúe jugando…" $\to$ $P(FT)=0,50$.
Se sabe también que $P(AG\cap FT)=0,30$

a) El suceso "al menos alguno de los dos" es la unión de ambos sucesos.
La probabilidad de la unión de dos sucesos es: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.
Por tanto:
$P(AG\cup FT)=P(AG)+P(FT)-P(AG\cap FT)$ = 0,70 + 0,50 − 0,30 = 0,90.

b) Ninguno de los dos es el suceso contrario de algunos de los dos:
$P\left(\overline{AG\cup FT}\right)=1-P(AG\cup FT)=1-0,90=0,10$.

b) El suceso solo Fernando Torres es $FT - AG \cap FT$. Su probabilidad es:
$P(FT-AG\cap FT)=0,50-0,30=0,20$.

42. Murcia, septiembre 18
CUESTIÓN A.5: En una clase hay 40 estudiantes, de los cuales 25 son chicas y el resto son chicos. Además, 30 estudiantes han aprobado las matemáticas, de los cuales 10 son chicos.
a) Elegido un estudiante al azar, se pide:
a.1) [0,5 p.] ¿Cuál es la probabilidad de que no haya aprobado las matemáticas?
a.2) [0,5 p.] ¿Cuál es la probabilidad de que sea chica y haya aprobado las matemáticas?
b) [0,5 p.] Si se elige un estudiante que ha aprobado las matemáticas, ¿cuál es la probabilidad de que sea una chica?
Solución:
Sean los sucesos:
M = "ser chica"; H = "ser chico";
A = "aprobar matemáticas"; S = "suspender matemáticas".
Se sabe que:
$P(M)=\frac{25}{40} \Rightarrow P(H)=\frac{15}{40}$; $P(A)=\frac{30}{40}=\frac{3}{4}$;
$P(A/H)=\frac{10}{15}$ $\to$ de los 15 chicos hay 10 aprobados $\Rightarrow$

$P(A/M) = \dfrac{20}{25}$ → si 10 de los 30 aprobados son chicos, los 20 restantes son chicas..

a.1) Si $P(A) = \dfrac{3}{4} \Rightarrow P(S) = \dfrac{1}{4}$.

a.2) $P(M \cap A) = P(M) \cdot P(A/M) = \dfrac{25}{40} \cdot \dfrac{20}{25} = \dfrac{1}{2}$.

b) $P(M / AQ) = \dfrac{P(M \cap A)}{P(A)} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}} = \dfrac{2}{3}$.

43. Murcia, septiembre 18

CUESTIÓN B.5: Realizada una encuesta entre los habitantes de una ciudad, se ha llegado a la conclusión de que el 40 % de sus habitantes lee habitualmente el periódico local, el 30 % lee revistas del corazón y el 20 % lee ambos tipos de publicaciones. Elegido un habitante al azar, se pide:

a) [0,5 p.] ¿Cuál es la probabilidad de que lea al menos alguno de los dos tipos de publicaciones?

b) [0,5 p.] ¿Cuál es la probabilidad de que no lea ninguno de los dos tipos de publicaciones?

c) [0,5 p.] ¿Cuál es la probabilidad de que lea solo revistas del corazón?

Solución:

Se utilizan las siguientes propiedades:

→ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;

→ $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$;

→ $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.

a) Sean los sucesos:

P = "leer el periódico local"; *R* = "leer revistas del corazón".

Se sabe que:

$P(P) = 0,40$; $P(R) = 0,30$; $P(P \cap R) = 0,20$.

Por tanto, la probabilidad de que lea al menos alguno de los dos tipos de publicaciones es:

$P(P \cup R) = 0,40 + 0,30 - 0,20 = 0,50$.

b) Que no lea ninguno de los dos tipos de publicaciones es el suceso contrario de leer alguna, luego:

$P(\overline{P \cup R}) = 1 - P(P \cup R) 01 - 0,50 = 0,50$.

c) Leer solo revistas del corazón es el suceso *R* – *P*.

$P(R - P) = P(R) - P(P \cap R) = 0,30 - 0,20 = 0,10$.

→ Navarra, junio y julio 17. No se ha propuesto ninguna pregunta de Probabilidad.

→ País Vasco, junio y julio17. No se ha propuesto ninguna pregunta de Probabilidad.