

Cálculo de Parámetros

Ejemplo 1: Determinar a, b y c para que la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tenga un máximo para $x = -4$, un mínimo para $x = 0$ y tome el valor 1 para $x = 1$

- valor 1 para $x = 1 \rightarrow (1, 1) \rightarrow f(1) = 1 \rightarrow 1 = 1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \rightarrow \mathbf{a + b + c = 0}$
- $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \rightarrow$ Nos dice que existe un mínimo en $x = 0$. Como es un mínimo la pendiente (o sea la derivada) en ese punto es cero.

$$f'(0) = 0 \rightarrow 3 \cdot 0^2 + 2a \cdot 0 + b = 0 \rightarrow \mathbf{b = 0}$$

- $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \rightarrow$ Nos dice que existe un máximo en $x = -4$. Como es un máximo la pendiente (o sea la derivada) en ese punto es cero.

$$f'(-4) = 3 \cdot (-4)^2 + 2a \cdot (-4) + b = 0 \rightarrow 48 - 8a + b = 0 \rightarrow \mathbf{8a - b = 48}$$

- Resolvemos el sistema $\begin{cases} +b + c = 0 \\ b = 0 \\ 8a - b = 48 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = 0 \\ c = -6 \end{cases}$

- **Ejemplo 2: Sea $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5$. Halla a y b para que la curva $y = f(x)$ tenga en $x = 1$ un punto de inflexión con tangente horizontal.**

- Si tenemos una tangente horizontal en $x = 1$, es que la pendiente en $x = 1$ es 0 o que la $f'(1) = 0$

- Si tenemos un punto de Inflexión en $x = 1 \rightarrow f''(1) = 0$

Por lo tanto lo primero que vamos a hacer es derivar nuestra función.

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \rightarrow f'(1) = 0 \rightarrow 3 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + b = 0 \rightarrow 3 + 2a + b = 0 \rightarrow 2a + b = -3$$

$$f''(x) = 6x + 2a \rightarrow f''(1) = 0 \rightarrow 6 \cdot 1 + 2a = 0 \rightarrow \mathbf{a = -3}$$

$$\text{Sustituyendo en } 2a + b = -3 \rightarrow 2 \cdot (-3) + b = -3 \rightarrow \mathbf{b = 3}$$

- **Ejemplo 3:** hallar el valor de b y m para que la curva $y=x^3 + bx^2 + mx + 1$ tenga un punto de inflexión en el punto $(0,1)$ y la pendiente de la recta tangente en ese punto valga 1.

- Si tiene un punto de inflexión en $x=0 \rightarrow f''(0)=0$
- Si la pendiente en $x=0$ vale 1 $\rightarrow f'(0)=1$
- Y por último pasa por el punto $(0,1) \rightarrow f(0)=1 \rightarrow 1=0^3+b\cdot 0^2+m\cdot 0+1 \rightarrow 1=1$ Se cumple

$$f'(x)=3x^2+2bx+m \rightarrow f'(0)=1 \rightarrow 3\cdot 0^2+2b\cdot 0+m=1 \rightarrow m=1$$

$$f''(x)=6x+2b \rightarrow f''(0)=0 \rightarrow 6\cdot 0+2b=0 \rightarrow b=0$$

- **Ejemplo 4:** La función $f(x)= ax^3+bx^2+cx+d$, tiene como tangente en el punto de inflexión $(1,0)$, la recta $y=-3x+3$, y presenta un extremo en el punto de abscisa $x=0$

- Pasa por el punto $(1,0) \rightarrow f(1)=0 \rightarrow a\cdot 1^3+b\cdot 1^2+c\cdot 1+d=0 \rightarrow a+b+c+d=0$
- Punto de Inflexión en $x=1 \rightarrow f''(1)=0 \rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c \rightarrow f''(x)=6ax+2b$

$$f''(1)=0 \rightarrow f''(1)=6a+2b=0$$

- Recta tangente a la recta $y=-3x+3$ en el punto $x=1$

$$f'(1)=-3 \rightarrow f'(1)=3a\cdot 1^2+2b\cdot 1+c=-3 \rightarrow 3a+2b+c=-3$$

- Presenta un extremo en $x=0$, es decir la derivada en ese punto es 0 $\rightarrow f'(0)=0$

$$f'(0)=3a\cdot 0^2+2b\cdot 0+c=0 \rightarrow c=0$$

$$\left. \begin{array}{l} a + b + c + d = 0 \\ 6a + 2b = 0 \\ 3a + 2b + c = -3 \\ c = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b + d = 0 \\ 6a + 2b = 0 \\ 3a + 2b = -3 \\ c = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 0 \\ d = 2 \end{array} \right\}$$

- **Ejemplo 5:** Calcula los valores a, b y c para que la función $f(x) = \frac{ax^3 - bx + c}{-x^2 + cx - 1}$ tenga una asíntota oblicua $y = -2x - 4$ y sabiendo que tiene una tangente horizontal en $x=0$.

$$y = -2x - 4 \rightarrow \begin{cases} m = -2 \\ n = -4 \end{cases}$$

- $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{ax^3 - bx + c}{-x^2 + cx - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^3 - bx + c}{-x^3 + cx^2 - x} = -a \rightarrow m = -a = -2 \rightarrow a = 2$
- $n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^3 - bx + c}{-x^2 + cx - 1} + 2x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^3 - bx + c - 2x^3 + 2cx^2 - 2x}{-x^2 + cx - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - bx + c - 2x^3 + 2cx^2 - 2x}{-x^2 + cx - 1} =$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-bx + c + 2cx^2 - 2x}{-x^2 + cx - 1} = -2c \rightarrow -2c = -4 \rightarrow c = 2$

- Como tiene una tangente horizontal en $x=0$

$$f'(0) = 0$$

$$\text{Derivamos : } f'(x) = \frac{(3ax^2 - b)(-x^2 + cx - 1) - (-2x + c)(ax^3 - bx + c)}{(-x^2 + cx - 1)^2}$$

$$f'(0) = \frac{(-b)(-1) - (c)(c)}{(-1)^2} = \frac{b - c^2}{1} = \frac{b - 2^2}{1} = b - 4$$

$$f'(0) = 0 \rightarrow b - 4 = 0 \rightarrow b = 4$$

$$\text{Solución: } \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \\ c = 2 \end{cases}$$

$$\text{La función resultante será: } f(x) = \frac{2x^3 - 4x + 2}{-x^2 + 2x - 1}$$

- **Ejemplo 6 (EBAU 2017 Septiembre):** La gráfica de la función $f(x) = \frac{ax^2 + bx + 5}{2x - 7}$ tiene como asíntota la recta $y = 2x - 3$. Determina los valores de los parámetros a y b.

$$y = 2x - 3 \rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = -3 \end{cases}$$

- $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{ax^2 + bx + 5}{2x - 7}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx + 5}{2x^2 - 7x} = \frac{a}{2} \rightarrow m = \frac{a}{2} = 2 \rightarrow a = 4$

$$\begin{aligned} \bullet \quad n &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx + 5}{2x - 7} - 2x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2 + bx + 5 - 4x^2 + 14x}{2x - 7} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + bx + 5 - 4x^2 + 14x}{2x - 7} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{bx + 5 + 14x}{2x - 7} = \rightarrow \frac{b + 14}{2} = -3 \rightarrow b + 14 = -6 \rightarrow b = -20 \end{aligned}$$

La función resultante será: $f(x) = \frac{4x^2 - 20x + 5}{2x - 7}$

- **Ejemplo 7 (EBAU septiembre -2017: Dada la función $f(x) = \frac{3x^2}{x^2 + ax + b}$ determinar los valores de a y b sabiendo que su gráfica posee un extremo relativo en el punto $(-3, \frac{9}{4})$**

$$\bullet \quad \text{Condiciones: } \begin{cases} f(-3) = \frac{9}{4} \\ f'(-3) = 0 \end{cases}$$

$$\bullet \quad f(-3) = \frac{3 \cdot (-3)^2}{(-3)^2 + a \cdot (-3) + b} = \frac{27}{9 - 3a + b}$$

$$\text{Como } f(-3) = \frac{9}{4} \rightarrow \frac{27}{9 - 3a + b} = \frac{9}{4} \rightarrow 108 = 81 - 27a + 9b \rightarrow \mathbf{3a - b = -3}$$

$$\bullet \quad \text{Derivamos la función: } f'(x) = \frac{6x \cdot (x^2 + ax + b) - (2x + a) \cdot 3x^2}{(x^2 + ax + b)^2} = \frac{3ax^2 + 6bx}{(x^2 + ax + b)^2}$$

$$\text{Como } f'(-3) = 0 \rightarrow f'(-3) = \frac{3a \cdot (-3)^2 + 6b \cdot (-3)}{((-3)^2 + a \cdot (-3) + b)^2} = 0 \rightarrow 27a - 18b = 0 \rightarrow \mathbf{3a - 2b = 0}$$

$$\bullet \quad \text{Realizamos el sistema de ecuaciones: } \begin{cases} 3a - b = -3 \\ 3a - 2b = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = -3 \end{cases}$$

La función resultante será: $f(x) = \frac{3x^2}{x^2 - 2x - 3}$

- **Ejemplo 8: (PAU septiembre-2016: Dada la función $f(x) = \frac{x^2 + x - a}{x^2 + 2x - 3}$, determinar el valor de a para que tenga una discontinuidad evitable en $x = -3$. Para el valor de a obtenido, definir de nuevo la función para que sea continua en $x = -3$**

Para que la función tenga una discontinuidad evitable en $x = -3$ se debe cumplir que exista el límite en ese punto (es decir que los límites laterales sean iguales) y que el valor de la función en ese punto sea distinto al de los límites o que la función no exista.

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} f(x) \rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow -3} f(x) \neq f(-3) \text{ o } \nexists f(-3)$$

- Calculamos el límite de la función en el punto $x = -3$

$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2+x-a}{x^2+2x-3} = \frac{6-a}{0}$ para que existe el límite debemos alcanzar una indeterminación del tipo $\left[\frac{0}{0}\right]$

por ello el valor de a tiene que ser 6 (**a=6**)

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2+x-a}{x^2+2x-3} = \frac{6-6}{0} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\text{Factorizamos } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2+x-6}{x^2+2x-3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x-2)(x+3)}{(x-1)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x-2}{x-1} = \frac{-3-2}{-3-1} = \frac{-5}{-4} = \frac{5}{4}$$

- Redefinimos la función para que la función sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-6}{x^2+2x-3} & \text{si } x \neq -3 \\ \frac{5}{4} & \text{si } x = -3 \end{cases}$$

- **Ejemplo 9: (PAU Junio 2015):** Dada la función $f(x) = \frac{ax^2+bx-2}{x^2+2x-8}$, determinar los valores de los parámetros a y b sabiendo que su gráfica tiene un extremo relativo en el punto $(-2, \frac{1}{2})$

- Condiciones: $\begin{cases} f(-2) = \frac{1}{2} \\ f'(-2) = 0 \end{cases}$

- Calculamos la derivada de la función:

$$f'(x) = \frac{(2ax+b) \cdot (x^2+2x-8) - (ax^2+bx-2) \cdot (2x+2)}{(x^2+2x-8)^2}$$

Como en $(-2, \frac{1}{2})$ tiene un extremo relativo $\Rightarrow f'(-2) = 0$

Por tanto:

$$\frac{4a-2b-2}{-8} = \frac{1}{2} \text{ y } \frac{(-4a+b) \cdot (-8) - (4a-2b-2) \cdot (-2)}{(-8)^2} = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4a-2b-2 = -4 \\ 40a-12b-4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a-b = -1 \\ 10a-3b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 1 \text{ y } b = 3$$

La función resultante será: $f(x) = \frac{x^2+3x-2}{x^2+2x-8}$

- **Ejemplo 10:** La función $f(x) = \frac{x^2 - a}{x^3 + x^2 + ax + 12}$ presenta una discontinuidad evitable en $x = -2$, ¿para qué valor de a ?

- Si presenta una discontinuidad evitable tendremos que:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) \neq f(-2) \text{ o } \nexists f(-2)$$

Si la función no existe en $x = -2$ quiere decir que el denominador de la función será igual a cero.

$$f(-2) = 0 \rightarrow (-2)^3 + (-2)^2 + a \cdot (-2) + 12 = 0 \rightarrow -8 + 4 - 2a + 12 = 0 \rightarrow a = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x^3 + x^2 + 4x + 12} = \left[\frac{0}{0} \right] \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)(x^2 - x + 6)} = \frac{-4}{12} = \frac{-1}{3}$$

Por lo tanto hemos demostrado que la función presenta una discontinuidad evitable, ya que para $a = 4$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) \text{ y } \nexists f(-2)$$

- **Ejemplo 11: (PAU Septiembre 2014)** Dada la función $f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{ax + b}$, determinar los valores de a y b sabiendo que su gráfica tiene un extremo relativo en el punto $(-2, -5)$

- Condiciones: $\begin{cases} f(-2) = -5 \\ f'(-2) = 0 \end{cases}$

- $f(-2) = \frac{(-2)^2 - (-2) - 1}{a(-2) + b} = \frac{4 + 2 - 1}{-2a + b} = \frac{5}{-2a + b}$

$$\text{Como } f(-2) = -5 \rightarrow \frac{5}{-2a + b} = -5 \rightarrow 5 = 10a - 5b \rightarrow 2a - b = 1$$

- Derivamos la función: $f'(x) = \frac{(2x-1)(ax+b) - (a)(x^2-x-1)}{(ax+b)^2} = \frac{ax^2 + 2bx - b + a}{(ax+b)^2}$

$$\text{Como } f'(-2) = 0 \rightarrow f'(-2) = \frac{a(-2)^2 + 2b(-2) - b + a}{(a(-2) + b)^2} = 0 \rightarrow 4a - 4b - b + a = 0 \rightarrow 5a - 5b = 0 \rightarrow a = b$$

- Realizamos el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 2a - b = 1 \\ a = b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$

La función resultante será: $f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x + 1}$

- **Ejemplo 12: (PAU Septiembre-2013).** Dada la función $f(x) = \frac{ax^2+2x-4}{x-b}$, determinar los valores de a y b sabiendo que su grafica tiene como asíntota oblicua la recta $y = x + 3$

$$y = x + 3 \rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 3 \end{cases}$$

- $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{ax^2+2x-4}{x-b}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2+2x-4}{x^2-bx} = a \rightarrow m = a = 1 \rightarrow \mathbf{a=1}$
- $n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2+2x-4}{x-b} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2+2x-4-x^2+bx}{x-b} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+2x-4-x^2+bx}{x-b} =$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+bx-4}{x-b} = \rightarrow \frac{2+b}{1} = 3 \rightarrow b + 2 = 3 \rightarrow \mathbf{b=1}$

La función resultante será: $f(x) = \frac{x^2+2x-4}{x-1}$

- **Ejemplo 13: (PAU Junio -2013).** La función $f(x) = \frac{ax^2+x-2}{x+b}$ posee un extremo relativo en $x = 1$ y tiene como asíntota oblicua la recta $y = -2x + 1$. Determinar los valores de los parámetros a y b.

- Condiciones: $\begin{cases} f'(1) = 0 \\ m = -2 \\ n = 1 \end{cases}$

- $f'(x) = \frac{(2ax+1)(x+b) - 1(ax^2+x-2)}{(x+b)^2} = \frac{2ax^2+x+2abx+b-ax^2-x+2}{(x+b)^2} = \frac{ax^2+2abx+b+2}{(x+b)^2}$

$$f'(1) = 0 \rightarrow f'(1) = \frac{a+2ab+b+2}{(1+b)^2} = 0 \rightarrow \mathbf{a+b+2ab+2 = 0}$$

- $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{ax^2+x-2}{x+b}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2+x-2}{x^2+bx} = a \rightarrow m = a = -2 \rightarrow \mathbf{a=-2}$

- $n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2+x-2}{x+b} + 2x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2+x-2+2x^2+2bx}{x+b} =$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+2bx-2}{x+b} = \rightarrow \frac{1+2b}{1} = 1 \rightarrow 2b + 1 = 1 \rightarrow \mathbf{b=0}$$

La función resultante será: $f(x) = \frac{-2x^2+x-2}{x}$

- **Ejemplo 14: (PAU Junio 2012)** La gráfica de la función $f(x) = \frac{ax^2+bx-4}{x-3}$ tiene como asíntota oblicua a la recta $y=x$. Por tanto, ¿cuáles son los valores de a y b ?

$$y=x \rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 0 \end{cases}$$

- $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{ax^2+bx-4}{x-3}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2+bx-4}{x^2-3x} = a \rightarrow m = a = 1 \rightarrow \mathbf{a=1}$

- $n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2+bx-4}{x-3} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax^2+bx-4-x^2+3x}{x-3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+bx-4-x^2+3x}{x-3} =$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+bx-4}{x-3} = \rightarrow \frac{3+b}{1} = 3 \rightarrow b+3=0 \rightarrow \mathbf{b=-3}$

La función resultante será: $f(x) = \frac{x^2-3x-4}{x-3}$

- **Ejemplo 15 (PAU septiembre 2012).** Hallar el valor de a de modo que la siguiente igualdad sea cierta:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{ax - a} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-3x+2}{ax-a} = \left[\frac{0}{0} \right] \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{a(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{a} = \frac{-1}{a}$$

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-3x+2}{ax-a} = 3 \rightarrow \frac{-1}{a} = 3 \rightarrow \mathbf{a = -\frac{1}{3}}$$