# Ejercicios de Geometría Afín Euclídea

**1.** Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección del plano $\pi \equiv x - y + 3z = -3$ con los ejes de coordenadas.

**2.** Calcula la ecuación del plano que pasa por el punto $P(1,2,-3)$ y es perpendicular a la recta:

$$r \equiv \begin{cases} 2x + y + 2 = 0 \\ 3x - z + 1 = 0 \end{cases}$$

**3.** Calcula $x$ para que el volumen del tetraedro determinado por los vectores $\vec{u} = (3,-3,1)$, $\vec{v} = (2,1,2)$ y $\vec{w} = (1,5,x)$ sea igual a $30$ unidades de volumen. Halla el área de la cara determinada por $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

**4.** Dados los planos de ecuaciones $\pi \equiv x + 2y - z + 4 = 0$, $\pi' \equiv 2x + y + Cz - 3 = 0$ ¿para qué valores de $C$ el ángulo formado por $\pi$ y $\pi'$ es de $60^\circ$?

**5.** Dados el plano $\pi \equiv x - y = 4$ y la recta

$$r \equiv \begin{cases} x + z = 1 \\ 2x + y + az = 0 \end{cases} \qquad a \in \mathbb{R}$$

se pide:

a) Estudia si existe algún valor del parámetro $a$ para el que $r$ y $\pi$ sean paralelos.

b) Para $a = 1$, da la ecuación implícita de un plano $\pi'$ que contenga a $r$ y corte perpendicularmente a $\pi$.

**6.** a) Estudia la posición relativa de las rectas

$$r \equiv x = -y = z \quad \text{y} \quad s \equiv x = y = z - 2$$

b) Calcula la distancia entre $r$ y $s$.

1.- Los puntos de intersección con los ejes son:

Eje OX : $y = z = 0 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow A(-3,0,0)$

Eje OY : $x = z = 0 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow B(0,3,0)$

Eje OZ : $x = y = 0 \Rightarrow z = -1 \Rightarrow C(0,0,-1)$

Área :

$$S = \frac{1}{2}\left|\vec{AB} \times \vec{AC}\right|$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{AB} = (3,3,0) \\ \vec{AC} = (3,0,-1)\end{array}\right\} \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + 3\vec{j} - 9\vec{k} = (-3,3,-9)$$

$$S = \frac{1}{2}\left|(-3,3,-9)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2 + 3^2 + (-9)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{99}\ u^2 = \boxed{\frac{3\sqrt{11}}{2}\ u^2}$$

2.- $P(1,2,-3)$ , $r \equiv \begin{cases} 2x + y + z = 0 \longrightarrow \vec{n}_{\pi_1} = (2,1,0) \\ 3x - z + 1 = 0 \longrightarrow \vec{n}_{\pi_2} = (3,0,-1) \end{cases}$

Como $\pi \perp r \Rightarrow \vec{n}_\pi = \vec{u}_r = \vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2} =$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1,2,-3)$$

Ecuación normal del plano :

$$(-1,2,-3)\cdot\left[(x,y,z) - (1,2,-3)\right] = 0$$

$$(-1,2,-3)\cdot(x-1, y-2, z+3) = 0 \Rightarrow -x + 1 + 2y - 4 - 3z - 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi \equiv -x + 2y - 3z - 12 = 0}$$

3.- $\left.\begin{array}{l}\vec{u} = (3,-3,1) \\ \vec{v} = (2,1,2) \\ \vec{w} = (1,5,x)\end{array}\right\}$ a) $V_{tetraedro} = \frac{1}{6}\left|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]\right| = 30\ u^3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & x \end{vmatrix} = 30 \Leftrightarrow \frac{1}{6}\left|9x - 27\right| = 30 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 30 \cdot 6 = |9x - 27| \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{207}{9} = 23} \wedge \boxed{x = \frac{153}{-9} = -17}$$

b) $A_{triángulo} = \frac{1}{2}\left|\vec{u} \times \vec{v}\right|$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -6\vec{i} + 3\vec{k} + 2\vec{j} + 6\vec{k} - \vec{i} - 6\vec{j} = (-7,-4,9)$$

$$\left|\vec{u} \times \vec{v}\right| = \sqrt{(-7)^2 + (-4)^2 + 9^2} = \sqrt{146} \Rightarrow A_{cara} = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{146}\ u^2}$$

**4.-** $\pi \equiv x+2y-z+4=0 \longrightarrow \vec{n}_{\pi}=(1,2,-1)$

$\pi' \equiv 2x+y+Cz-3=0 \longrightarrow \vec{n}_{\pi'}=(2,1,C)$

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_{\pi}\cdot\vec{n}_{\pi'}|}{|\vec{n}_{\pi}|\,|\vec{n}_{\pi'}|} \Rightarrow \cos 60^\circ = \frac{|(1,2,-1)\cdot(2,1,C)|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}\,\sqrt{2^2+1^2+C^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = \pm\frac{2+2-C}{\sqrt{6}\,\sqrt{5+C^2}} \Rightarrow \sqrt{6}\,\sqrt{5+C^2} = \pm 2(4-C) \Rightarrow \sqrt{6(5+C^2)} = \pm 2(4-C)$$

$$\Rightarrow 6(5+C^2) = [\pm 2(4-C)]^2 \Rightarrow C^2+16C-17=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = \begin{cases} \dfrac{-16+18}{2} = \boxed{1} \\ \dfrac{-16-18}{2} = \boxed{-17} \end{cases}$$

**5.-** $\pi \equiv x-y=4$

$$r \equiv \begin{cases} x+z=1 \equiv \pi_1 \\ 2x+y+az=0 \equiv \pi_2 \end{cases}, \quad a\in\mathbb{R}$$

a) $r \parallel \pi \Leftrightarrow \vec{u}_r \perp \vec{n}_{\pi} \Leftrightarrow \vec{u}_r\cdot\vec{n}_{\pi}=0$

- $\vec{u}_r = \vec{n}_{\pi_1}\times\vec{n}_{\pi_2} = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix} = \vec{k}+2\vec{j}-\vec{i}-a\vec{j} = (-1,2-a,+1)$

- $\vec{u}_r\cdot\vec{n}_{\pi}=0 \Rightarrow (-1,2-a,1)\cdot(1,-1,0)=0 \Rightarrow -1-2+a=0 \Rightarrow \boxed{a=3}$

b) $\pi' \equiv \begin{cases} \vec{u}_r = \text{vector director de } r \\ \vec{u}_{\pi} = \text{" normal a } \pi \\ \vec{RP} \text{ donde } R\in r \text{ (cualquiera) y } P(x,y,z)\in\pi \text{ (genérico)} \end{cases}$

$R(0,-1,1)$

$\vec{RP}=(x,y,z)-(0,-1,1)=(x,y+1,z-1)$

$$\pi' \equiv \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y+1 & -1 & -1 \\ z-1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -(y+1)-(z-1)+(z-1)-x=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi' \equiv x+y+1=0}$$

$\boxed{6}$ a) $r \equiv x = -y = z \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -y \Rightarrow x + y = 0 \\ x = z \Rightarrow x - z = 0 \end{cases}$

$s \equiv x = y = z - 2 \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = y \Rightarrow x - y = 0 \\ x = z - 2 \Rightarrow x - z = -2 \end{cases}$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Rango de M

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1-1 \neq 0 \Rightarrow rg\, M = 3$$

Rango de $\tilde{M}$

$$|\tilde{M}| = -2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rg\, \tilde{M} = 4$$

$\Rightarrow \boxed{r \text{ y } s \text{ se cruzan}}$

De otra forma

$\vec{u_r} = (1, -1, 1)$

$\vec{u_s} = (1, 1, 1)$

$P_r(0,0,0) \in r$, $P_s(0,0,2)$, $\vec{P_r P_s} = (0,0,2)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow r \text{ y } s \text{ se cruzan}$$

b) $$d(r,s) = \left| \frac{\det(\vec{u_r}, \vec{u_s}, \vec{P_r P_s})}{|\vec{u_r} \times \vec{u_s}|} \right|$$

$$\vec{u_r} \times \vec{u_s} = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -2\vec{i} + 2\vec{k} = (-2, 0, 2)$$

$$|\vec{u_r} \times \vec{u_s}| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

$$\boxed{d(r,s) = \frac{4}{\sqrt{8}} = \frac{4\sqrt{8}}{8} = \frac{\sqrt{8}}{2} = \sqrt{2}\ u}$$