CÁLCULO DE LÍMITES.

Límite $x \to \infty$

Límite de un polinomio. Sustituimos solo en el monomio de mayor grado.

1. Calcula los siguientes límites.

VER VIDEO https://youtu.be/Aww0iJ3oulw

a. $\lim_{x \to +\infty} x^2 - 3x + 1 = +\infty$

b. $\lim_{x \to -\infty} x^3 - 3x + 1 = -\infty$

Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$.

Por orden de infinitud.

EXPONENCIAL	> POTENCIAL	> LOGARÍTMICA
$3^x > 2^x$	$x^3 > x^2$	$\log_3 x < \log_2 x$

2. Calcula los siguientes límites.

a. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x}{e^x}$

b. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x}{\ln x}$

c. $\lim_{x \to +\infty} \frac{3^x}{e^x}$

VER VIDEO https://youtu.be/sbOuwXLFteU

a. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}(\text{ind.}) = 0$

b. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - x}{\ln x} = \frac{\infty}{\infty}(\text{ind.}) = +\infty$

c. $\lim_{x\to+\infty} \frac{3^x}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}(\text{ind.}) = +\infty$

Cociente de polinomios. Dividimos numerador y denominador entre la mayor potencia del denominador.

---

3. Calcula los siguientes límites.

a. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x}{x + 1}$

b. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x}{2x^2 + 1}$

c. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x}{2x^2 + x^3}$

VER VIDEO https://youtu.be/ddHDqJA6L1g

---

a. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x}{x + 1} = \frac{\infty}{\infty}(\text{ind.}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2}{x} - \frac{x}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x - 1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{\infty - 1}{1 + \frac{1}{\infty}} = +\infty$

b. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x}{2x^2 + 1} = \frac{\infty}{\infty}(\text{ind.}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{2 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1 - \frac{1}{\infty}}{2 + \frac{1}{\infty}} = \frac{1}{2}$

c. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x}{2x^2 + x^3} = \frac{\infty}{\infty}(\text{ind.}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2}{x^3} - \frac{x}{x^3}}{\frac{2x^2}{x^3} + \frac{x^3}{x^3}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x} + 1} = \frac{\frac{1}{\infty} - \frac{1}{\infty}}{\frac{2}{\infty} + 1} = \frac{0}{1}$
$= 0$

Otra forma. De cada polinomio nos quedamos solo con el monomio de mayor grado.

---

4. Calcula los siguientes límites.

a. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x}{x + 1}$

b. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x}{2x^2 + 1}$

c. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x}{2x^2 + x^3}$

VER VIDEO https://youtu.be/JmJhd4lHHyI

---

a. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x}{x + 1} = \frac{\infty}{\infty}(\text{ind.}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 - x}{2x^2+1} = \dfrac{\infty}{\infty}(\text{ind.}) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{2x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 - x}{2x^2+x^3} = \dfrac{\infty}{\infty}(\text{ind.}) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\infty} = 0$

Otra forma. Por orden de infinitud, comparando el grado del numerador y el denominador. Seguimos la siguiente tabla:

EXPONENCIAL >	POTENCIAL >	LOGARÍTMICA
$3^x > 2^x$	$x^3 > x^2$	$\log_3 x < \log_2 x$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{ax^k + bx^{k-1} + \cdots}{a'x^p + b'x^{p-1} + \cdots} = \begin{cases} \text{grado numerador} < \text{grado del denominador} \\ k < p \to \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ax^k + bx^{k-1} + \cdots}{a'x^p + b'x^{p-1} + \cdots} = 0 \\ \text{grado numerador} = \text{grado del denominador} \\ k = p \to \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ax^k + bx^{k-1} + \cdots}{a'x^p + b'x^{p-1} + \cdots} = \dfrac{a}{a'} \\ \text{grado numerador} > \text{grado del denominador} \\ k > p \to \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{ax^k + bx^{k-1} + \cdots}{a'x^p + b'x^{p-1} + \cdots} = \dfrac{a}{a'}.\infty \end{cases}$$

5. Calcula los siguientes límites.

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 - x}{x+1}$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 - x}{2x^2+1}$

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 - x}{2x^2+x^3}$

VER VIDEO https://youtu.be/9MUs0FnYbDw

En el ejemplo a ⟶ grado numerador > grado denominador

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 - x}{x+1} = \dfrac{1}{1}\infty = +\infty$

En el ejemplo b ⟶ grado numerador = grado denominador

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 - x}{2x^2+1} = \dfrac{1}{2}$

En el ejemplo c ⟶ grado numerador < grado denominador

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2 - x}{2x^2+x^3} = 0$

6. Calcula el límite siguiente de tres formas distintas.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{2x^2-1} - x}{3x+1}$$

VER VIDEO https://youtu.be/RDwLUk9qlaY

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}-\frac{x}{x}}{\frac{3x}{x}+\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2-\frac{1}{x^2}}-1}{3+\frac{1}{x}}=\frac{\sqrt{2}-1}{3}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2-1}-x}{3x+1}=\frac{\infty}{\infty}(\text{ind.})=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2}-x}{3x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{2}-1)x}{3x}=\frac{\sqrt{2}-1}{3}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2-1}-x}{3x+1}=\frac{\infty}{\infty}(\text{ind.})=\frac{\sqrt{2}-1}{3}$$

Indeterminación $\infty-\infty$

Por orden de infinitud.

EXPONENCIAL > POTENCIAL > LOGARÍTMICA

$3^x>2^x$ $\quad x^3>x^2$ $\quad \log_3 x<\log_2 x$

7. Calcula los siguientes límites.

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} 3^x-x^2$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}-x^2$

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} 3^x-x^2$

d. $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\ln x$

VER VIDEO https://youtu.be/2ImfuyOZ8Xg

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} 3^x-x^2=\infty-\infty\ (\text{ind.})=+\infty$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}-x^2=\infty-\infty\ (\text{ind.})=-\infty$

c. $\lim\limits_{x\to+\infty} 3^x-x^2=\infty-\infty\ (\text{ind.})=+\infty$

d. $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\ln x=\infty-\infty\ (\text{ind.})=+\infty$

Si se puede restar, restamos.

8. Calcula el siguiente límite.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x-1}-\frac{x^2+1}{x}$$

VER VIDEO https://youtu.be/gy6heM7h1S4

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x-1}-\frac{x^2+1}{x}=\infty-\infty(\text{ind.})=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-(x-1).(x^2+1)}{(x-1).x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-(x^3+x-x^2-1)}{(x-1).x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x^3-x+x^2+1}{(x-1).x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x+1}{x^2-x}=1$$

Si hay raíces se multiplica y divide por la expresión conjugada.

9. Calcula el siguiente límite.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)$$

VER VIDEO https://youtu.be/RuP12Z7IoZ8

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)=\infty-\infty\ (\text{ind.})=\lim_{x\to\infty}\frac{\overbrace{\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}^{\text{Identidad notable.}}}{\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2-x^2}{\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\left(\sqrt{x^2-1}+x\right)}=\frac{-1}{\infty}=0$$

Indeterminación 1^∞.

$$\lim_{x\to+\infty} f^g=1^\infty=e^{\lim\limits_{x\to+\infty} g.(f-1)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \mathit{exponente}.(\text{base}-1)}$$

10. Calcula los siguientes límites.

a. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x+1}$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}$

VER VÍDEO https://youtu.be/F5WEGDwwDyM

a. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x+1}=1^\infty=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\cdot\left(\frac{x}{x+1}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1).\left(\frac{-1}{x+1}\right)}=$

$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x-1}{x+1}}=e^{-1}=\frac{1}{e}$

b. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{\frac{x^2+1}{x}}=1^\infty=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x}\cdot\left(\frac{x}{x+1}-1\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x}.\left(\frac{-1}{x+1}\right)}=$

$=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x^2-1}{x^2+x}}=e^{-1}$

Límite $x\to k$, $k\in R$

Indeterminación $\frac{0}{0}$.

11. Calcula los siguientes límites.

a. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{x^2-x}$

b. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{x^2-x}$

VER VÍDEO https://youtu.be/WA-iDKsfoLw

a. $\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{x^2-x}=\frac{0}{0}(\text{ind.})\overset{\substack{\text{sacamos x}\\ \text{factor común}}}{\cong}\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{x.(x-1)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{(x-1)}=\frac{1}{-1}=-1$

$$\text{b. } \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-x}=\frac{0}{0}(\text{ind.}) \overset{\substack{\text{factorizamos}\\ \text{numerador y}\\ \text{denominador}}}{\widehat{=}} \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x-1}}{x\cdot\cancel{(x-1)}}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\frac{1}{1}=1$$

12. Calcula los siguientes límites.

$$\text{a. } \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-3x+2}$$

$$\text{b. } \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^3-3x-2}$$

VER VÍDEO https://youtu.be/B81oiQ6upAA

$$\text{a. } \lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-3x+2}=\frac{0}{0}(\text{ind.}) \overset{\substack{\text{factorizamos}\\ \text{numerador y}\\ \text{denominador}}}{\widehat{=}} \lim_{x\to 0}\frac{\cancel{(x-1)}.(x^2+x+1)}{\cancel{(x-1)}\cdot(x-2)}=\frac{3}{-1}=$$

$$=-3$$

	1	0	0	-1
1		1	1	1
	1	1	1	0

Numerador (x – 1).(x² + x + 1)

	1	-3	2
1		1	-2
	1	-2	0

Denominador (x – 1).(x –2)

$$\text{b. } \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^3-3x-2}=\frac{0}{0}(\text{ind.})=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}\cdot(x^2+2x+1)}=\frac{1}{9}$$

	1	0	-3	-2
2		2	4	2
	1	2	1	0

Denominador (x – 2).(x² + 2x + 1)

Caso $\frac{k}{0}$.

13. Calcula los siguientes límites.

$$\text{a. } \lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x-1}$$

$$\text{b. } \lim_{x\to -2}\frac{x+1}{x+2}$$

VER VÍDEO https://youtu.be/J-mJvc0kzCs

$$\text{a. } \lim_{x\to 1}\frac{\mathbf{x+1}}{\mathbf{x-1}}=\frac{2}{0}=\pm\infty \rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{+}{-}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{+}{+}=+\infty \end{cases}$$

$$\text{b. } \lim_{x\to -2}\frac{\mathbf{x+1}}{\mathbf{x+2}}=\frac{-1}{0}=\pm\infty \rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{-}{-}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{-}{+}=-\infty \end{cases}$$

Indeterminación 1^∞.

$$\lim_{x\to k} f^g = 1^\infty = e^{\lim\limits_{x\to k} g.(f-1)}$$

14. Calcula los siguientes límites.

$$\text{a. } \lim_{x\to 2}\left(\frac{x}{4-x}\right)^{\frac{1}{x-2}}$$

$$\text{b. } \lim_{x\to 2}\left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{x-2}}$$

$$\text{a. } \lim_{x\to 2}\left(\frac{x}{4-x}\right)^{\frac{1}{x-2}} = 1^\infty = e^{\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}\right).\left(\frac{x}{4-x}-1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}\right).\left(\frac{2x-4}{4-x}\right)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{2\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}.(4-x)}} = e^{\frac{2}{2}} = e$$

$$\text{b. } \lim_{x\to 2}\left(\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{x-2}} = 1^\infty = e^{\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}\right).\left(\frac{2}{x}-1\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}\right).\left(\frac{2-x}{x}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{\cancel{(2-x)}}{\cancel{(x-2)}.x}} = e^{\lim\limits_{x\to 2}\frac{-1}{x}}$$

$$= e^{\frac{-1}{2}}$$

15. Calcula los siguientes límites.

$$\text{a. } \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$$

$$\text{b. } \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-2\sqrt{x}}$$

$$\text{a. } \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\frac{0}{0}(\text{ind.})=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\cdot(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)\cdot(\sqrt{x}+1)}=$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\cdot(\sqrt{x}+1)}{\left(\sqrt{x}\right)^2-1^2}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}\cdot(\sqrt{x}+1)}{\cancel{x-1}}=2$$

$$\text{b. } \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-2\sqrt{x}}=\frac{0}{0}(\text{ind.})=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)\cdot(\sqrt{x}+2)\cdot(x+2\sqrt{x})}{(x-2\sqrt{x})\cdot(x+2\sqrt{x})\cdot(\sqrt{x}+2)}=$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{\left[\left(\sqrt{x}\right)^2-2^2\right]\cdot(x+2\sqrt{x})}{\left[x^2-\left(2\sqrt{x}\right)^2\right]\cdot(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)\cdot(x+2\sqrt{x})}{[x^2-4x]\cdot(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{\cancel{(x-4)}\cdot(x+2\sqrt{x})}{x\cancel{(x-4)}\cdot(\sqrt{x}+2)}$$

$$= \frac{4+4}{4 \cdot (2+2)} = \frac{1}{2}$$

16. Calcula los siguientes límites y haz la interpretación geométrica de los resultados.

a. $\lim_{x \to 1} \frac{x+2}{x-1}$

b. $\lim_{x \to 1} \frac{x^3+2x^2-3x}{x^3-1}$

VER VIDEO https://youtu.be/qcMO8UWyCmI

17. Calcula los siguientes límites y haz la interpretación geométrica de los resultados.

a. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x+2}{x-1}$

b. $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3+2x^2-3x}{x^2-1}$

VER VIDEO https://youtu.be/7Lapw72vFiY