OPCIÓN A

A 1 *(hasta 3 puntos)*

Sea la región definida por las inecuaciones:

$$x + y - 1 \geq 0 \ , \qquad 0 \leq x \leq 4, \qquad 0 \leq y \leq 2$$

Determinar los puntos de dicha región en los que la función $F(x, y) = 4x + 2y$ alcanza sus valores máximo y mínimo. Calcular los valores de la función en dichos puntos.

A 2 *(hasta 3 puntos)*

Sea la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$.

a) Encontrar los valores de los parámetros a, b y c para que la función pase por el punto $(0\,,0)$ y tenga un extremo relativo en el punto $(2, -4)$.
b) Determinar los máximos, mínimos y puntos de inflexión de la función $f(x)$.
c) Calcular el área de la región delimitada por el gráfico de la función y el eje de abscisas.

A 3 *(hasta 2 puntos)*

En un instituto hay tres grupos de 1º de bachillerato con el mismo número de estudiantes. En el grupo A dos tercios de los/las estudiantes practican algún tipo de deporte, mientras que en los grupos B y C solo lo hacen la mitad de los/las estudiantes.
Entre todo el alumnado se escoge una persona al azar, y resulta que no practica deporte. ¿Cuál es la probabilidad de que dicha persona pertenezca al grupo A?

A 4 *(hasta 2 puntos)*

Tras realizar una prueba de cultura general entre los habitantes de cierta población, se observa que las puntuaciones obtenidas siguen una distribución normal, de media 68 y desviación típica 18.
Se desea clasificar a los habitantes en tres grupos (de baja cultura general, de cultura general aceptable, de cultura general excelente), de manera que el primer grupo abarque un 20 % de la población, el segundo un 65 %, y el tercero el 15 % restante.
¿Cuáles son las puntuaciones que marcan el paso de un grupo a otro?

OPCIÓN B

B 1 *(hasta 3 puntos)*

Sean A y B las siguientes matrices: $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Hallar la matriz inversa de $A - B$
b) Hallar la matriz X tal que $X(A - B) = 2A - 3B$

B 2 *(hasta 3 puntos)*

Sean las funciones $f(x) = x^4 - 4$ y $g(x) = 3x^2$.

a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de ambas funciones, así como los extremos relativos y los puntos de inflexión si los hubiera.
b) Representa gráficamente ambas funciones sobre el mismo eje de coordenadas.
c) Calcula el área de la región delimitada por ambas curvas.

B 3 *(hasta 2 puntos)*

En una determinada población, la probabilidad de ser mujer y padecer diabetes es el 6 %, mientras que la de ser hombre y no padecer diabetes es el 37 %. En dicha población hay un 54 % de mujeres.
Se elige una persona al azar.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que la persona elegida padezca diabetes?
b) Si la persona elegida es mujer, ¿cuál es la probabilidad de que no padezca diabetes?
c) Si la persona elegida resulta tener diabetes, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

B 4 *(hasta 2 puntos)*

La nota de la Evaluación para el Acceso a la Universidad del alumnado que se ha preinscrito en la carrera A sigue una distribución normal de media 6,8 y desviación típica 0,6. Por otro lado, la nota de los/las alumnos/as que se han preinscrito en la carrera B sigue una distribución normal de media 7 y desviación típica 0,5.
Si en ambos casos solo se puede admitir al 25 % del alumnado preinscrito, ¿cuál de las dos carreras requerirá una nota mínima más baja?

OPCIÓN B

Problema B.1 (3 puntos)

c. **1,5 puntos**
   - Determinar $A-B$, **0,25 puntos.**
   - Determinante $A-B$, **0,25 puntos.**
   - Cálculo de la matriz inversa de $A-B$, **1 punto.**

d. **1,5 puntos.**
   - Determinar X, **0,5 puntos.**
   - Cálculo de $2A-3B$, **0,25 puntos.**
   - Calcular la matriz X, **0,75 puntos.**

Problema B.2 (3 puntos)

d. **1,1 puntos**
   - Estudio de la función $f(x)$, **0,6 puntos**
     - i. Intervalos de crecimiento y decrecimiento, 0,3 puntos.
     - ii. Máximos y mínimos relativos, 0,2 puntos.
     - iii. Definición de punto de inflexión, 0,1 puntos.
   - Estudio de la función $g(x)$, **0,5 puntos.**
     - i. Intervalos de crecimiento y decrecimiento, 0,3 puntos.
     - ii. Máximos y mínimos relativos, 0,2 puntos.

e. **0,9 puntos**
   - Gráfico de $f(x)$, **0,45 puntos.**
   - Gráfico de $g(x)$, **0,45 puntos.**

f. **1 punto**
   - Planteamiento del cálculo del área, **0,25 puntos.**
   - Cálculo de la integral, **0,25 puntos.**
   - Cálculo de la superficie a través de la regla de Barrow, **0,5 puntos.**

Problema B.3 (2 puntos)

d. **0,8 puntos**
   - Elaboración de la tabla de contingencia, **0,2 puntos.**
   - Cálculo de la probabilidad pedida, **0,6 puntos.**

e. **0,6 puntos.** Cálculo de la probabilidad condicionada pedida.

f. **0,6 puntos.** Cálculo de la probabilidad condicionada pedida.

Problema B.4 (2 puntos)

- La carrera A, **1 punto**
  - o Planteamiento, **0,25 puntos.**
  - o Tipificación de la variable, **0,25 puntos.**
  - o Cálculo de la cota, **0,5 puntos.**
- Del mismo modo para la carrera B, **1 punto.**

SOLUCIONES

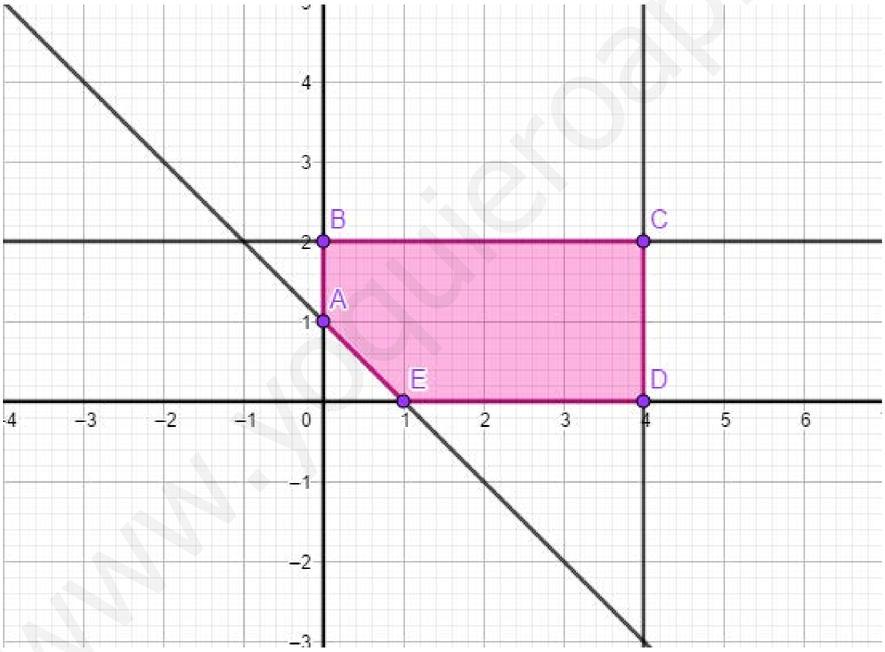
OPCIÓN A

A 1 *Problema de programación lineal en dos variables.*

- La función objetivo es: $F(x, y) = 4x + 2y$

- Las restricciones son: $\begin{cases} x + y \geq 1 \\ x \geq 0 \\ x \leq 4 \\ y \geq 0 \\ y \leq 2 \end{cases}$

- Recinto de soluciones compatibles en el plano XY:



- Los vértices del recinto son: $A\ (0,1)$, $B\ (0,2)$, $C\ (4,2)$, $D\ (4,0)$ y $E\ (1,0)$.

- La función $F(x, y)$ tiene un **máximo en el punto $\boldsymbol{C\ (4,2)}$** siendo $F(4,2) = 20$

- La función $F(x, y)$ tiene un **mínimo en el punto $\boldsymbol{A\ (0,1)}$** siendo $F(0,1) = 2$

A 2 *Cálculo de los parámetros de una función y sus máximos y mínimos relativos.*

a) Determina a, b, c siendo $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

- La función pasa por el punto $(0, 0)$ $\Rightarrow$ $f(0) = 0$ $\Rightarrow c = 0$

Por lo tanto, $\boldsymbol{f(x) = x^3 + ax^2 + bx}$

- La función pasa por el punto (2, -4) $\Rightarrow f(2) = -4 \Rightarrow 8 + 4a + 2b = -4$
  $\Rightarrow 2a + b = -6$
- La función en $x = 2$ tiene un extremo relativo $\Rightarrow f'(2) = 0$
  $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow f'(2) = 0 = 12 + 4a + b \Rightarrow$
  $\Rightarrow 4a + b = -12$

Por lo tanto:

$\begin{cases} 2a + b = -6 \\ 4a + b = -12 \end{cases} \Rightarrow a = -3$ y $b = 0$ **Esto es:** $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 3x^2}$

b) Máximos, mínimos relativos y puntos de inflexión

- Máximos y mínimos
  - ✓ $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0$ y $x = 2$ puntos singulares
  - ✓ $f''(x) = 6x - 6 \Rightarrow$

$f''(0) = -6 < 0 \Rightarrow x = 0$ máximo, esto es, $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ **Máximo relativo**

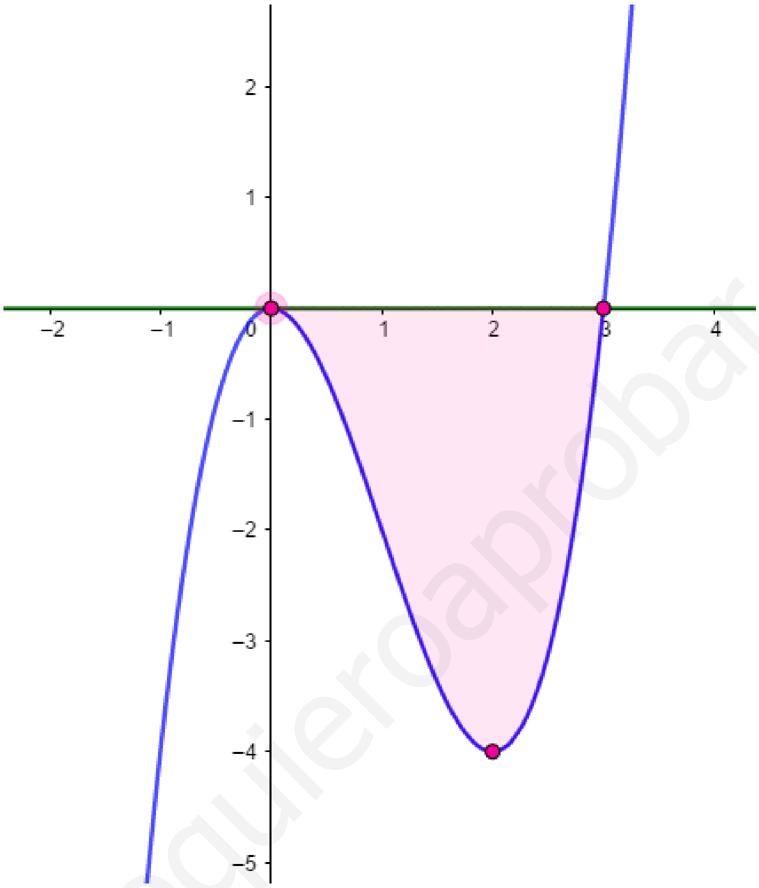
$f''(2) = 6 > 0 \Rightarrow x = 2$ mínimo, esto es, $(\mathbf{2}, -\mathbf{4})$ **Mínimo relativo**

- Puntos de inflexión
  - ✓ $f''(x) = 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$
  - ✓ $f'''(x) = 6 \Rightarrow f'''(1) = 6 \neq 0$

Por lo tanto en $x = 1$ hay un punto de inflexión, esto es,

$(\mathbf{1}, -\mathbf{2})$ **Punto de inflexión**

c) Calcular la superficie de la región delimitada por el gráfico de la función y el eje de abscisas

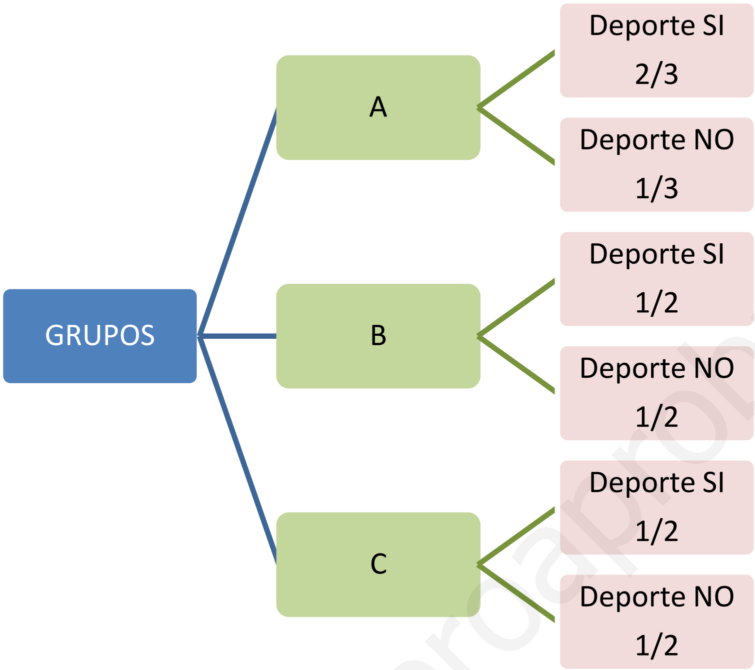


Para determinar el área hay que calcular la integral definida,

$$A = \int_0^3 [0 - (x^3 - 3x^2)]dx = \int_0^3 (-x^3 + 3x^2)\,dx = \left[-\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{27}{4}u^2$$

Por lo tanto: $\boldsymbol{A = \frac{27}{4}u^2}$

A 3 *Ejercicio de cálculo de probabilidades que puede resolverse*, *a través de un diagrama de árbol (o a través de la fórmula de la probabilidad total) y la probabilidad condicionada (teorema de Bayes)*



- Probabilidad total

$P(\text{deporte no}) =$

$$= P(A)\, P(\text{deporte no} \mid A) + P(B)P(\text{deporte no} \mid B) + P(C)P(\text{deporte no} \mid C) =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{4}{9}$$

- Probabilidad "*a posteriori*": Fórmula de Bayes

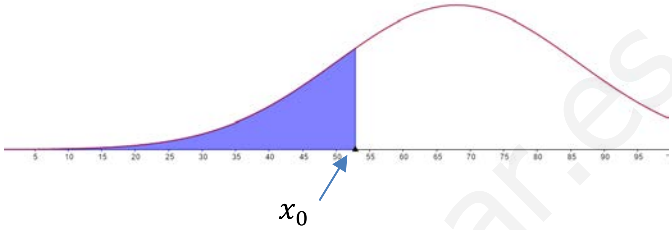
$$P(A \mid \text{deporte no}) = \frac{P(A \cap \text{deporte no})}{P(\text{ deporte no})} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{4}{9}} = 1/4$$

A 4 *Comprensión y utilización de una distribución normal.*

$$X \equiv \text{testaren puntuazioa} \sim N(\ \mu\ , \sigma\ ) = N(\ 68,\ \ 18\ )$$

Hay que determinar los valores de x_0 y x_1 de tal modo que $P(X \leq x_0) = 0{,}2$ y $P(X \leq x_1) = 0{,}85$

- $P(X \leq x_0) = 0{,}2 \ \Rightarrow \ x_0$



✓ Tipificación de la variable X: $\quad Z = \frac{X-68}{18} \quad \Rightarrow \ X = 18Z + 68$

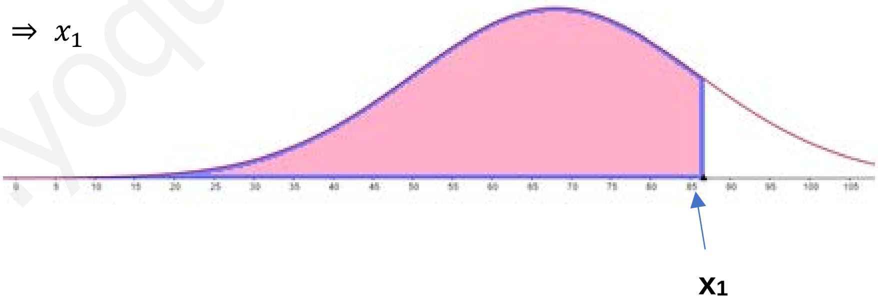
✓ $P(X \leq x_0) = \ P(18Z + 68 \leq x_0) = \ P(Z \leq \frac{x_0-68}{18} = k) = 0{,}2$

$\frac{x_0-68}{18} = k$ es negativo porque la probabilidad es menor que 0,5; entonces, por simetría:

$$P(Z \leq -k\ ) = 0{,}8 \quad \Rightarrow \ -k = -\ \frac{x_0-68}{18} = 0{,}845 \quad \Rightarrow \ \boldsymbol{x_0 = 52{,}79}$$

Por lo tanto, el 20 % de la población ha sacado menos de 52,79 puntos.

- $P(X \leq x_1) = 0{,}85 \ \Rightarrow \ x_1$



$$P(X \leq x_1) = \ P(18Z + 68 \leq x_1) = P\left(Z \leq \frac{x_1-68}{18}\right) = 0{,}85 \ \Rightarrow P(Z \leq k\ ) = 0{,}85 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \frac{x_1 - 68}{18} = 1{,}035 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x_1 = 86{,}63}$$

Por lo tanto, el 15 % de la población ha sacado más de 86,63 puntos

En consecuencia, el 65 % de la población ha obtenido una puntuación mayor que 52,79 puntos y menor que 86,63.

Concluimos que: las personas de nivel cultural bajo han sacado menos de 52,79 puntos; las que tienen nivel cultural medio son las que han sacado una puntuación entre 52,79 y 86,63 puntos; y las de cultura general alta han conseguido una puntuación superior a 86,63 puntos

OPCIÓN B

B 1 *Problema de cálculo matricial. Operaciones entre matrices. Matriz inversa.*

a) La matriz inversa de $A - B \equiv (A-B)^{-1}$

- $A - B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

- $|A-B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists (A-B)^{-1}$

- $(A-B)^{-1} = \frac{1}{|A-B|}\big(Adj(A-B)\big)^t = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Esto es: $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$

b) Determinar X tal que $X(A-B) = 2A - 3B$

$$X(A-B) = 2A - 3B \;\Rightarrow\; X(A-B)(A-B)^{-1} = (2A-3B)(A-B)^{-1}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{X} = (\mathbf{2}\boldsymbol{A} - \mathbf{3}\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^{-\mathbf{1}}$$

- $(2A-3B) = 2\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
- Sabemos $(A-B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
- Por lo tanto:

$$X = (2A-3B)(A-B)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Esto es: $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{5} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$

B 2 *(Problema de análisis de funciones. Determinación de máximos, mínimos, puntos de inflexión, representación gráfica y cálculo de área entre dos curvas)*

a)

- Analizamos la función: $\boldsymbol{f(x) = x^4 - 4}$
  - Intervalos de crecimiento y decrecimiento

La primera derivada es: $y' = 4x^3$

$y' = 4x^3 > 0 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow$ $\boldsymbol{f(x)}$ **es creciente en el intervalo** $(\boldsymbol{0}, \quad \infty)$

$y' = 4x^3 < 0 \Rightarrow x < 0 \Rightarrow$ $\boldsymbol{f(x)}$ **es decreciente en el intervalo** $(-\infty, \quad \boldsymbol{0})$

- Máximos y mínimos relativos:

$$y' = 4x^3 \quad \Rightarrow \quad 4x^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

$$y'' = 12x^2 \quad \Rightarrow \quad f''(0) = 0$$

$$y''' = 24x \quad \Rightarrow \quad f'''(0) = 0$$

$$y^{iv} = 24 \quad \Rightarrow \quad f^{iv}(0) = 24 > 0$$

La primera derivada que no se anula en $x = 0$ es de grado cuarto, esto es una derivada de grado par y su valor es positivo por lo tanto en el punto $x = 0$ la función tiene un mínimo relativo. Por lo tanto: $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{-4})$ **mínimo relativo**

- La función $f(x)$ no tiene puntos de inflexión.

- Analizamos la función $\boldsymbol{g(x) = 3x^2}$
  - Intervalos de crecimiento y decrecimiento:

La primera derivada es: $y' = 6x$

$y' = 6x > 0 \Rightarrow x > 0 \Rightarrow$ $\boldsymbol{g(x)}$ **es creciente en el intervalo** $(\boldsymbol{0}, \quad \infty)$

$y' = 6x < 0 \Rightarrow x < 0 \Rightarrow$ $\boldsymbol{g(x)}$ **es decreciente en el intervalo** $(-\infty, \quad \boldsymbol{0})$

- Máximos y mínimos relativos:

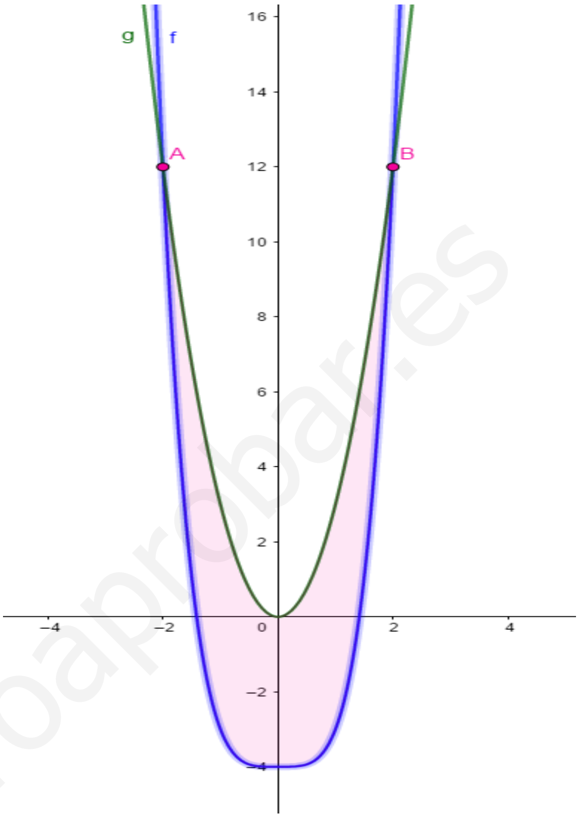
$$y' = 6x \quad \Rightarrow \quad 6x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

$y'' = 6 \quad \Rightarrow \quad g''(0) > 0 \quad \Rightarrow$ En el punto $x = 0$ la función tiene un mínimo.

Por lo tanto, $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0})$ **mínimo relativo**

- $g''(x) = 6 > 0 \quad \forall x \quad \Rightarrow$ la función no tiene puntos de inflexión.

b) Representación gráfica de las funciones:



c) Área de la región delimitada por ambas curvas:

- Puntos de corte entre ambas funciones:

$$\begin{cases} y = x^4 - 4 \\ y = 3x^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x^4 - 4 = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad x^4 - 3x^2 - 4 = 0$$

Como es una ecuación bicuadrada, haciendo el cambio de variable $x^2 = t$, la ecuación que conseguimos es:

$t^2 - 3t - 4 = 0 \Rightarrow t = -1$ y $t = 4 \Rightarrow x = \pm 2$, $(x = \pm\sqrt{-1} \notin \mathbb{R})$

Por lo tanto, los puntos de corte son: $A = (-2, 12)$ y $B = (2, 12)$

- Para calcular el área comprendida entre las dos funciones resolvemos la siguiente integral definida:

$$A = \int_{-2}^{2} [3x^2 - (x^4 - 4)]\, dx = \int_{-2}^{2} [3x^2 - x^4 + 4]\, dx = \left[\frac{3x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + 4x\right]_{-2}^{2} = \boldsymbol{\frac{96}{5} u^2}$$

B 3 *Problema de cálculo de probabilidades que se puede resolver con tabla de contingencia y con probabilidades condicionadas.*

Con los datos del problema se elabora la tabla de contingencia:

	Diabetes	No Diabetes	
Mujer	0,06	0,48	0,54
Hombre	0,09	0,37	0,46
	0,15	0,85	1

a) La probabilidad de que una persona tomada al azar padezca diabetes es:

$$\boldsymbol{P(\text{diabetes}) = 0,06 + 0,09 = 0,15}$$

b) La probabilidad de que, sabiendo que es mujer, no padezca diabetes es:

$$\boldsymbol{P(\text{no diabetes} \mid \text{mujer})} = \frac{P(\text{mujer } \cap \text{no diabetes})}{P(\text{mujer})} = \frac{0{,}48}{0{,}54} = \boldsymbol{0,889}$$

c) La probabilidad de que, sabiendo que tiene diabetes, sea mujer:

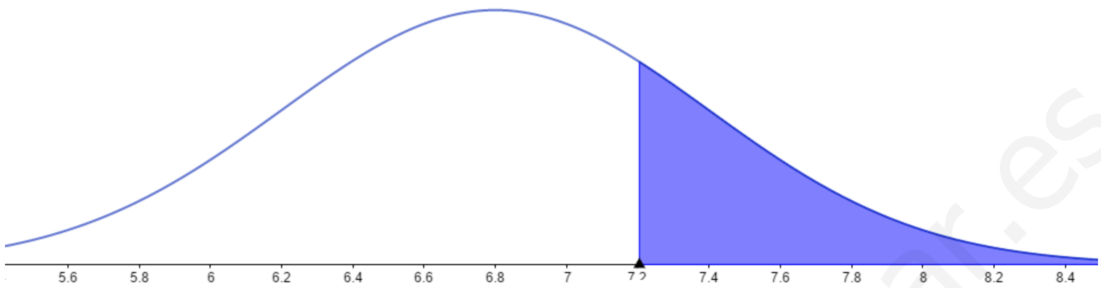
$$\boldsymbol{P(\text{mujer} \mid \text{diabetes})} = \frac{P(\text{mujer } \cap \text{diabetes})}{P(\text{diabetes})} = \frac{0{,}06}{0{,}15} = \boldsymbol{0,4}$$

B 4 *Problema de cálculo de probabilidades en una distribución normal.*

Carrera A: $X \equiv N\,(\mu, \quad \sigma) = N\,(6{,}8\,;\ 0{,}6)$

Carrera B: $Y \equiv N\,(\mu', \quad \sigma') = N\,(7\,;\ 0{,}5)$

Carrera A



a

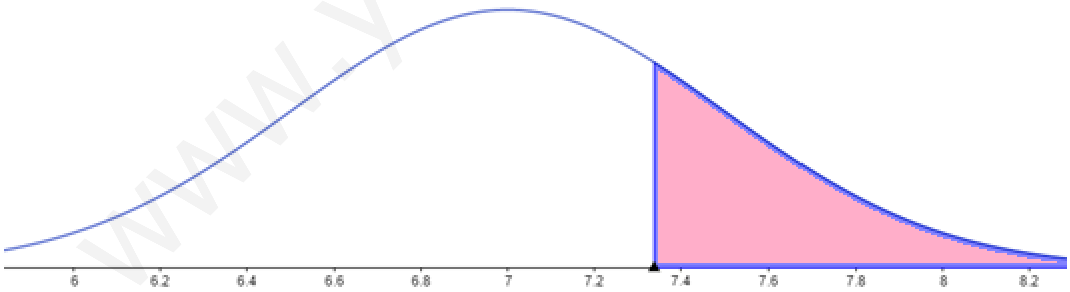
$$P(X > a) = 0{,}25 \;\Rightarrow\; P\left(\frac{X-6{,}8}{0{,}6} > \frac{a-6{,}8}{0{,}6}\right) = 0{,}25 \;\Rightarrow P\left(Z > \frac{a-6{,}8}{0{,}6}\right) = 0{,}25 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 1 - P\left(Z \le \frac{a-6{,}8}{0{,}6}\right) = 0{,}25 \;\Rightarrow\; P\left(Z \le \frac{a-6{,}8}{0{,}6}\right) = 0{,}75 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{a-6{,}8}{0{,}6} = 0{,}675 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{a = 7{,}205}$$

Por lo tanto, la nota mínima que se pedirá para entrar en la carrera A será 7,205.

Carrera B



b

$$P(Y > b) = 0{,}25 \;\Rightarrow\; P\left(\frac{Y-7}{0{,}5} > \frac{b-7}{0{,}5}\right) = 0{,}25 \;\Rightarrow\left(Z \le \frac{b-7}{0{,}5}\right) = 0{,}75 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{b-7}{0{,}5} = 0{,}675 \;\Rightarrow \boldsymbol{b = 7{,}3375}$$

Por lo tanto, la nota mínima que se pedirá para entrar en la carrera B será 7,3375.

Concluimos que se pedirá una nota más baja para entrar en la carrera A.