OPCIÓN A

A 1 *(hasta 3 puntos)*
Un vehículo utiliza como combustible una mezcla de gasolina y queroseno. Se deben cumplir las restricciones: (i) La capacidad del depósito es de 10 litros; (ii) la cantidad *G* (en litros) de gasolina debe ser, como mínimo, 2/3 de la de queroseno *K*, donde *K≥0*; (iii) un litro de gasolina cuesta 1 € y uno de queroseno 0.5 €, siendo 8 € el límite de gasto total. Responder las siguientes cuestiones:

a) Dibuja la región del plano KG en la que las cantidades de litros de gasolina G y queroseno K son compatibles con las restricciones (i), (ii) y (iii).
b) La función F(*G*,*K*) = 8*G*+5*K* representa la distancia, en kilómetros, recorrida por el vehículo en función del los consumos de gasolina y queroseno. Calcular los valores óptimos de G y K compatibles con las restricciones y que le permitan recorrer mayor distancia.

A 2 *(hasta 3 puntos)*
Dada la función $h(x) = a + Ln(x) - 6x + 2x^2$ definida en el intervalo 0.01 ≤ x ≤ 3, donde la función $Ln(x)$ representa el logaritmo neperiano de x. Responder:

a) ¿Cuánto debe valer el parámetro a para que se cumpla $h(1)=-1$?
b) Dada la función $f(x) = 4 + Ln(x) - 6x + 2x^2$, definida en el mismo intervalo 0.01 ≤ x ≤ 3, ¿cuáles son las coordenadas de los máximos y mínimos locales de $f(x)$ en dicho intervalo? (Ayuda: resolver $xf'(x) = 0$)

A 3 *(hasta 2 puntos)*
Un equipo de fútbol pasa una encuesta a sus socios para estimar la asistencia a los partidos. Un socio contesta que si el partido se juega en fin de semana (sábado o domingo) acude un 90% de las veces y, si es en alguno de los otros días, su asistencia baja al 70%. Suponiendo que la elección del día de la semana es aleatoria, calcula:

a) Si este fin de semana hay partido, ¿qué probabilidad hay de que no asista?
b) Si la próxima semana hay partido, ¿cuál es la probabilidad de que asista?
c) Si la semana pasada asistió a un partido, ¿cuál es la probabilidad de que se celebrara en fin de semana?

A 4 *(hasta 2 puntos)*
En una piscifactoría se quiere estimar la proporción de hembras entre la población de peces, para lo cual, se toma una muestra aleatoria de 500 peces. Después del recuento, resulta que 175 son hembras. Se pide calcular:

a) El intervalo de confianza para la proporción de hembras en esa población de peces, correspondiente a un nivel de confianza del 94%.
b) ¿cuál es el tamaño mínimo que debería tener la muestra para que el error máximo de la estimación de la proporción de hembras sea ≤ 0’02, con un nivel de confianza del 94%?

OPCIÓN B

B 1 *(hasta 3 puntos)*

a) Calcular los parámetros *a, b, c, d* para que se cumpla la igualdad $\mathrm{F}\cdot\mathrm{G} = \mathrm{H}\cdot\mathrm{K}$, con las siguientes matrices:

$$\mathrm{F} = \begin{pmatrix} 1+a-b & -1 \\ 2+b & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{G} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3-d \end{pmatrix}, \quad \mathrm{H} = \begin{pmatrix} 2a+2 & -2 \\ c & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{K} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ b & 3 \end{pmatrix}$$

b) Determinar el exponente *n* de la matriz A para que se cumpla:

$$\mathrm{A}^n = \begin{pmatrix} -2048 & 0 \\ 0 & -2048 \end{pmatrix} \ , \quad \text{donde } \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

B 2 *(hasta 3 puntos)*

La siguiente función *f(x)*, mide los beneficios de una compañía de telecomunicaciones con respecto al número ($x \geq 1$) de antenas instaladas:

$$f(x) = 100 - \frac{98}{x} - 2x.$$

a) Calcular el número de antenas x que maximiza los beneficios.
b) ¿En qué intervalo debe encontrarse x para que el beneficio sea positivo?

B 3 *(hasta 2 puntos)*

De un grupo de personas sabemos que el 60% están casadas. Entre las personas casadas, el 80% tiene trabajo y, por otro lado, el 10% de las personas solteras está en paro.

a) Si una persona elegida al azar tiene trabajo, ¿cuál es la probabilidad de que esté casada?
b) Entre las personas que están en paro, ¿cuál es el porcentaje de las personas que están casadas?

B 4 *(hasta 2 puntos)*

Según los datos de una encuesta, se conoce que, en una determinada zona rural, el tiempo en minutos que dedican a ver la televisión los fines de semana, es una variable aleatoria que sigue una distribución N= (μ, 75). Elegida una muestra de televidentes, se ha obtenido el intervalo de confianza (188'18, 208'82) para la media μ de esa distribución, con un nivel de confianza del 99%. Calcular:

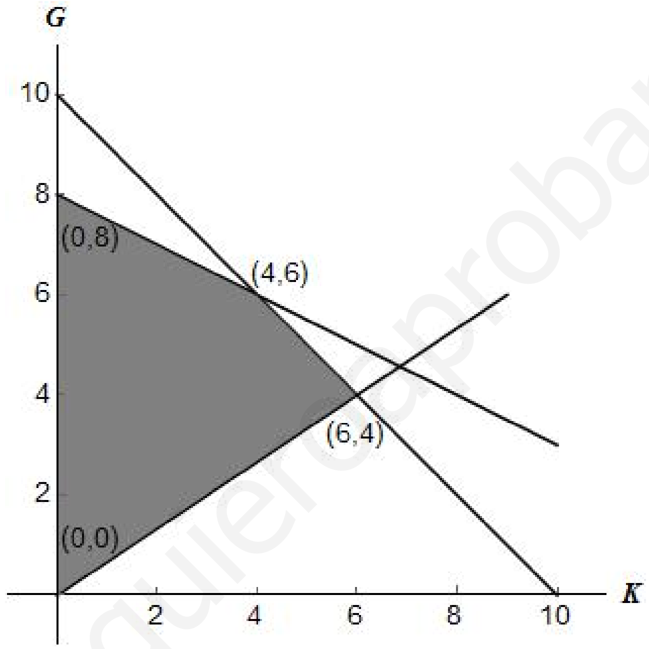
a) La media muestral y el tamaño mínimo de la muestra.
b) El error máximo cometido en la estimación de la media μ, si se hubiese utilizado una muestra de tamaño n=500 y el nivel de confianza es del 96%.

SOLUCIONES

OPCIÓN A

A 1 *Problema de programación lineal en dos variables. Interpretación:*

a) Recinto de soluciones compatibles en el plano KG:



b) El trayecto más largo que se puede realizar es de 68km eligiendo G=6 y K=4.

A 2 *Cálculo de los parámetros de una función. Cálculo de valores de una función y de sus máximos y mínimos:*

a) $h(1) = -1 \Rightarrow a + Log(1) - 6 + 2 = -1 \Rightarrow a = 3.$

b) $f'(x) = \frac{1}{x} - 6 + 4x \Rightarrow 0 = xf'(x) = 1 - 6x + 4x^2 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36-16}}{8} \Rightarrow \begin{cases} x = 0.19, \\ x = 1.31. \end{cases}$

$f(0.19) = 1.271$ (máximo local), $f(1.31) = -0.158$ (mínimo local).

A 3 *Ejercicio de cálculo de probabilidades que puede resolverse mediante un diagrama de árbol y la probabilidad condicional:*

PARTIDOS

- FIN DE SEMANA: 2/7
  - 0’9 asiste
  - 0’1 no va
- ENTRE SEMANA: 5/7
  - 0’7 asiste
  - 0’3 no va

a) P = 0’1
b) P= 2/7 · 0’9 +5/7 · 0’7 =5’3/7 = 0’757
c) P= 2/7 · 0’9 / (2/7 · 0’9 + 5/7 · 0’7)= 1’8 / 5’3 = 0’339

A 4 *Cálculo de un intervalo de confianza para la proporción de una población:*

a) n = 500 175 hembras y $n_c = 0'94$

$$\hat{p} = \frac{175}{500} = \frac{7}{20} = 0'35 \qquad \hat{q} = \frac{13}{20} = 0'65$$

Cálculo de $Z_{\frac{\alpha}{2}}$: $\frac{1+n_c}{2} = \frac{1+0'94}{2} = 0'970 \Rightarrow \quad Z_{\frac{\alpha}{2}} = \quad 1'885$

$$I.C. \equiv \left(\hat{p} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}, \hat{p} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right) =$$

$$\left(0'35 - 1'885 \cdot \sqrt{\frac{0'35\cdot 0'65}{500}}, 0'35 + 1'885 \cdot \sqrt{\frac{0'35\cdot 0'65}{500}}\right) = (0'31, 0'39)$$

b) error = 0’02 por tanto, $0'02 = 1'885 \cdot \sqrt{\frac{0'35\cdot 0'65}{n}} \Rightarrow \quad n = 2021$

OPCIÓN B

B 1 *Ejercicio de cálculo matricial:*

a) $\mathrm{F}\cdot\mathrm{G}=\mathrm{H}\cdot\mathrm{K}$: $\begin{pmatrix}-6-2a+2b & -2+a-b+d\\ -2b & 5+b-d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2-2a-b & -2+4a\\ -2b-c & -6+2c\end{pmatrix}$

Ordenando las igualdades adecuadamente: $\begin{cases}-6-2a+2b=-2-2a-b\rightarrow b=1,\\ -2b=-2b-c\rightarrow c=0,\\ 5+b-d=-6+2c\rightarrow d=12,\\ -2+a-b+d=-2+4a\rightarrow a=11/3.\end{cases}$

b) $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \mathrm{A}^2=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow\cdots\ \Rightarrow(\mathrm{A}^2)^k=\begin{pmatrix}-2^k & 0\\ 0 & -2^k\end{pmatrix}$

$-2^k=-2048\Rightarrow k=11$ luego n =22.

B 2 *Cálculo de valores y de máximos y mínimos de una función. Interpretación:*

a) $f(x)=100-\frac{98}{x}-2x\Rightarrow f'(x)=\frac{98}{x^2}-2.\ f'(x)=0\Rightarrow x=\sqrt{49}=7$

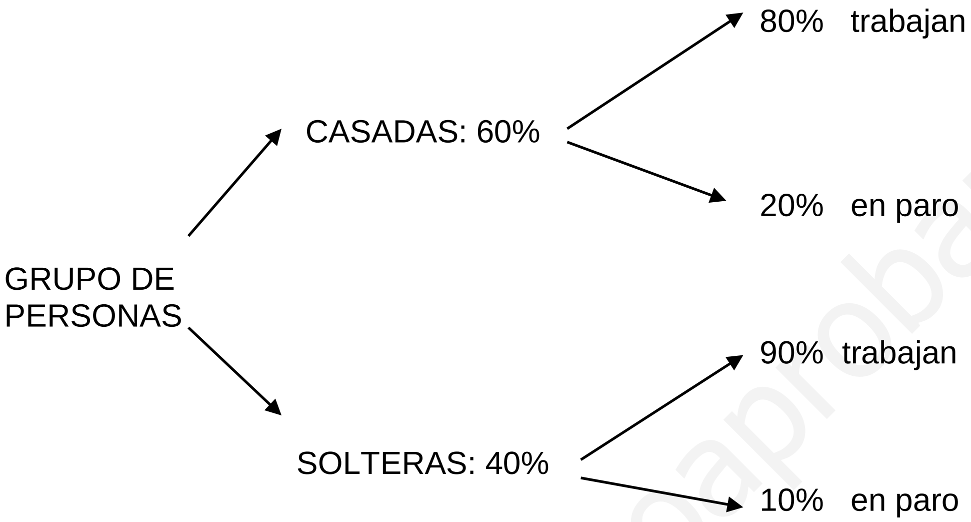
x=7 es el máximo ya que $f''(7)<0.\ f(x)=72$

b) Puntos de corte entre $f(x)$ y el eje OX: $f(x)=100-\frac{98}{x}-2x=0.$

Multiplicando la ecuación por (–x) y dividiendo entre 2: $x^2-50x+49=0$

$x=\frac{50\pm\sqrt{50^2-4\cdot 50}}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=1,\\ x=49.\end{cases}$ Luego si 1 ≤ x ≤ 49 entonces $f(x)$ ≥ 0.

B 3 *Ejercicio de cálculo de probabilidades que puede resolverse mediante un diagrama de árbol y la probabilidad condicional:*



a) P(Trab/casada) = 0'6 · 0'8 / (0'6 · 0'8 + 0'4 · 0'9) = 0'48 /(0'48 + 0'36) = 4/7 = 0'571

b) P(parada/casada) = 0'6 · 0'2 / (0'6 · 0'2 + 0'4 · 0'1) = 0'12 /(0'12 + 0'04) = 3/4 = 0'75

B 4 *Cálculo del intervalo de confianza de la media de una población que sigue una distribución normal:*

a) σ= 75 I.C.= (188'18, 208'82) n_c= 99%

Cálculo de $Z_{\frac{\alpha}{2}}$: $\frac{1+n_c}{2} = \frac{1+0'99}{2}$ = 0'9950 => $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ = 2'575

(188'18, 208'82) = $(\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} , \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 188'18 \\[2ex] \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 208'82 \end{array}\right\} \quad 2\,\bar{x} = 397'00 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = 198'5$$

Cálculo del tamaño de la muestra: de la expresión $\bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 208'82$, obtenemos:

$$\sqrt{n} = 2'575 \cdot 75 \,/\, (208'82 - 198'5) \;\Rightarrow\; n = 350$$

b) $n = 500$ $\quad n_c = 96\%$ $\quad \sigma = 75$

Cálculo de $Z_{\frac{\alpha}{2}}$: $\frac{1+n_c}{2} = \frac{1+0'96}{2} = 0'9800 \;\Rightarrow\; Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'055$

$$\text{Error: } Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2'055 \cdot \frac{75}{\sqrt{500}} = 6'876 \text{ min}$$