

OPCIÓN A

A 1 (hasta 3 puntos)

Considérense las siguientes desigualdades en el plano XY cuando $x \geq 0$ e $y \geq 0$:

$$x + 2y \leq 7, x + y \geq 3, 2y - x \geq -4$$

- Dibuja el recinto restringido por las desigualdades anteriores en el plano XY.
- Encuentra el máximo de la función $F(x,y) = 2x + 3y$ en el recinto del apartado anterior.
- Encuentra el máximo de la función $F(x,y)$ cuando x e y son números enteros en el espacio de soluciones del apartado (a).

A 2 (hasta 3 puntos)

Un inversor conoce el valor que tendrán las acciones de una empresa a lo largo del año. La función $f(t) = t^3/3 - 5t^2 + 16t + 30$ expresa dicho valor en euros, donde el tiempo t está medido en meses, $0 \leq t \leq 12$. Si inicialmente dispone de 3000 euros y durante el año puede realizar como máximo 2 operaciones de compra y 2 de venta:

- Utilizando el análisis de los máximos y mínimos de $f(t)$, deducir en qué instantes debe realizar el inversor cada compra y cada venta para que, a final de año ($t = 12$), disponga del máximo de dinero.
- ¿Cuál será el máximo beneficio que podrá obtener realizando las 4 operaciones óptimas indicadas en el apartado anterior?

Nota: Téngase en cuenta que el inversor, en cada operación, utilizará todo su dinero o todas sus acciones.

A 3 (hasta 2 puntos)

Un banco diseña diversos tipos de préstamos para empresas y particulares. A estos últimos les fueron concedidos el 60% del total. Pasado un tiempo, el banco no recuperó el 6% de los créditos a empresas y el 20% de los particulares.

- Si se selecciona un crédito al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea moroso?
- Entre los créditos que son morosos, ¿qué probabilidad corresponden a empresas?

A 4 (hasta 2 puntos)

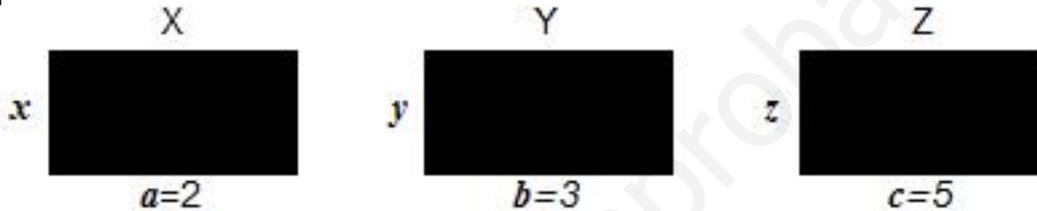
En un gabinete médico se realiza una prueba de reacción a señales luminosas para medir los reflejos de los pacientes. Los resultados en milisegundos (ms) se ajustan a una distribución normal $N(\mu, \sigma)$, donde $\sigma = 300$ ms. A partir de una muestra aleatoria simple, se obtiene un intervalo de confianza de (740,820) para esa media " μ ", con $n_c = 95\%$. Se pide:

- La media muestral y el tamaño de la muestra elegida.
- El error cometido en el cálculo de " μ ", si ahora tomamos una muestra aleatoria simple de tamaño 64 y $n_c = 86\%$.

OPCIÓN B

B 1 (hasta 3 puntos)

- a) Dadas las matrices $R = \begin{pmatrix} x & 3 \\ -1+x & 3y \end{pmatrix}$ y $S = \begin{pmatrix} 1 & -15 \\ 0 & 36 \end{pmatrix}$, determinar el valor de las componentes $x > 0$ e y para que se verifique $R^2 = S$, donde $R^2 = R \cdot R$.
- b) Se conoce la longitud, $a=2$, $b=3$ y $c=5$, de un lado de cada rectángulo de la figura X, Y, Z (NO dibujados a escala) y la otra no, x , y , z . Determinar x , y , z para que se cumpla: (i) la suma del área de los tres rectángulos vale 64, (ii) la suma de los perímetros de los rectángulos X e Y vale 34 y (iii) la suma del perímetro de X más dos veces el área de Y vale 48.



B 2 (hasta 3 puntos)

La función $f(x)$ está definida a trozos. Cuando $x \leq 3$ vale $f(x) = ax + b$ y cuando $x \geq 3$ vale $f(x) = cx^2 + dx + e$, donde a , b , c , d y e son parámetros desconocidos. Si la función $f(x)$ tiene un máximo en $x=4$ y la función y su derivada en $x=3$ valen respectivamente $f(3)=3$ y $f'(3)=2$:

- Hallar los valores de los parámetros a , b , c , d y e que determinan la función $f(x)$.
- Obtener las coordenadas de los puntos de corte P y Q de la función $f(x)$ con el eje de abscisas OX y calcular la integral de $f(x)$ en el intervalo $[P, Q]$.

B3 (hasta 2 puntos)

En una urna hay 15 bolas blancas y 5 bolas negras. Calcular:

- Si se extrae una bola al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea blanca?
- Extrayendo dos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean blancas?
- Si se extrae primero una bola, y luego otra, siendo la primera negra, ¿cuál es la probabilidad de que la segunda sea también negra?
- Si se extrae una bola y luego otra, ¿cuál es la probabilidad de que sean de distinto color?

B4 (hasta 2 puntos)

Un estudio, sobre el número de fumadores de una zona a partir de una muestra de tamaño 361, señala que la proporción muestral de fumadores es del 35%. Con estos datos se pide calcular:

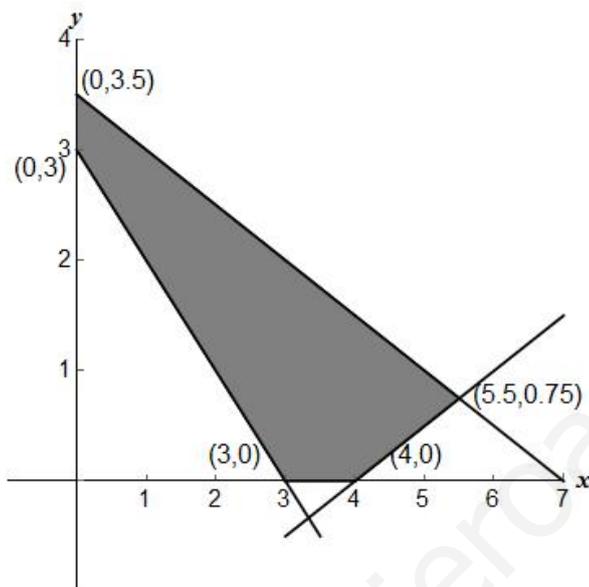
- ¿Cuál es el intervalo de confianza al 95%?
- ¿Cuál debería ser el tamaño de la muestra para que la amplitud del intervalo de confianza al 99% sea de 0,12?

SOLUCIONES

OPCIÓN A

A 1 Problema de programación lineal en dos variables:

a) Recinto de soluciones compatibles en el plano XY:



b) Los vértices del recinto son: (0,3), (0,3.5), (3,0), (4,0) y (5.5,0.75). El máximo de la función $F(x,y)$ está en (5.5,0.75), $F(5.5,0.75) = 13.25$

c) Los siguientes puntos del recinto tienen como coordenadas números enteros: (0,3), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,0), (3,1), (3,2), (4,0), (4,1) y (5,1). El máximo está en (5,1), $F(5,1) = 13$.

A 2 Cálculo de los valores de una función y sus máximos. Interpretación:

a) $f(t) = t^3/3 - 5t^2 + 16t + 30 \Rightarrow f'(t) = t^2 - 10t + 16$.

$$f'(t) = 0 \Rightarrow t = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 16}}{2} \Rightarrow \begin{cases} t = 2, \\ t = 8. \end{cases}$$

En $t=2$ está el máximo, $f''(2) < 0$, y en $t=8$ el mínimo, $f''(8) > 0$. Para obtener el mayor beneficio se comprará en precios mínimos ($t=0$ y $t=8$) y se venderá en precios máximos ($t=2$ y $t=12$).

b) Para obtener el máximo beneficio se debe seguir la siguiente secuencia:

$t=0$, $f(0)=30$: comprar 100 acciones = 3000€,

$t=2$, $f(2)=134/3$: vender las 100 acciones = 4466.67€.

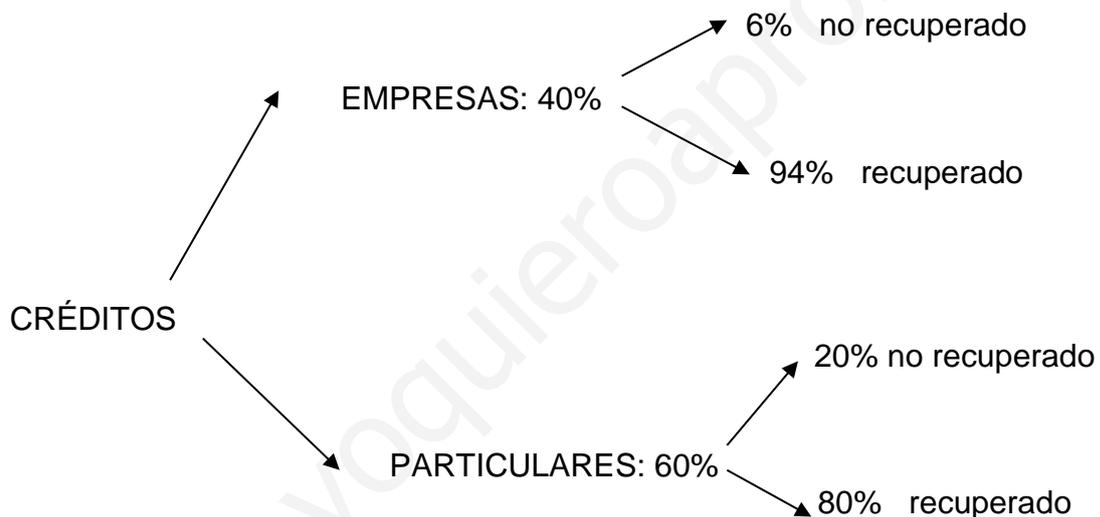
$t=8, f(8)=26/3$: comprar 515 acciones = 4466.67€ (3.33€ sobrantes).

$t=12, f(12)=78$ vender las 515 acciones = 40170€.

El dinero obtenido por la venta más el sobrante de 3.33€ = 40173.33€
menos los 3000€ iniciales = 37173.33€ (beneficios).

Observación: A los y las estudiantes que respondan la solución 40170€ ó 40173.33€ se les considerará el problema correcto dado que han entendido el proceso.

A 3 Ejercicio de cálculo de probabilidades que puede resolverse mediante un diagrama de árbol y la probabilidad condicional:



a) $P(\text{moroso}) = 0'4 \cdot 0'06 + 0'6 \cdot 0'2 = 0'024 + 0'12 = 0'144.$

b) $P(\text{empresa/moroso}) = 0'4 \cdot 0'06 / (0'4 \cdot 0'06 + 0'6 \cdot 0'2) = 0'024 / 0'144 = 0'166.$

A 4 Ejercicio de cálculo de un intervalo de confianza para la media de una población con distribución normal:

a) Cálculo de $Z_{\frac{\alpha}{2}}: \frac{1+n_c}{2} = \frac{1+0'95}{2} = 0'9750 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96.$

$$(740, 820) = (\bar{x} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

$$\left. \begin{array}{l} \bar{x} - 1'96 \frac{300}{\sqrt{n}} = 740 \\ \bar{x} + 1'96 \frac{300}{\sqrt{n}} = 820 \end{array} \right\} \quad 2 \bar{x} = 1560 \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = 780.$$

Cálculo del tamaño de la muestra: de la expresión $\bar{x} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 820$, obtenemos:

$$\sqrt{n} = 1'96 \cdot 300 / (820 - 780) \Rightarrow n = 217 \text{ (redondeo del valor } 216'09)$$

$$\text{b) } n_c = 86\% \quad n = 64.$$

$$Z_{\frac{\alpha}{2}}: \frac{1+n_c}{2} = \frac{1+0'86}{2} = 0'9300 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'48.$$

$$\text{Error: } Z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1'48 \cdot \frac{300}{\sqrt{64}} = 1'48 \cdot 37'5 = 55'5 \text{ ms.}$$

OPCIÓN B

B 1 Ejercicio de cálculo matricial y de resolución de sistemas lineales:

$$a) R^2 = \begin{pmatrix} -3 + 3x + x^2 & 3x + 9y \\ -x + x^2 - 3y + 3xy & -3 + 3x + 9y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -15 \\ 0 & 36 \end{pmatrix} = S$$

$$x^2 + 3x - 3 = 1, x > 0 \Rightarrow x = \frac{-3 + \sqrt{9+16}}{2} = 1. \text{ Del resto: } y = -2.$$

b) De las condiciones planteadas se deduce el siguiente sistema lineal:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y + 5z = 64, \\ 2(2 + x) + 2(3 + y) = 34, \\ 2(2 + x) + 2 \cdot 3y = 48. \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 7, \\ y = 5, \\ z = 7. \end{cases}$$

B 2 Continuidad de funciones y cálculo de parámetros desconocido de una función. Cálculo de integral definida:

$$a) \begin{cases} x \leq 3: f'(3) = 2 \Rightarrow a = 2, f(3) = 3 \Rightarrow b = -3 \\ x \geq 3: f'(3) = 2 \Rightarrow 6c + d = 2, f(3) = 3 \Rightarrow 9c + 3d + e = 3, f'(4) = 0 \Rightarrow 8c + d = 0, \end{cases}$$

En consecuencia: $a = 2, b = -3, c = -1, d = 8, e = -12$.

b) Los puntos de corte de la función con el eje OX:

$$x \leq 3: f(x) = 0 \Rightarrow 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \Rightarrow P = \left(\frac{3}{2}, 0\right).$$

$$x \geq 3: f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 8x - 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{-8 - \sqrt{64 - 48}}{-2} = 6 \Rightarrow Q = (6, 0).$$

Cálculo de la integral definida:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{3}{2}}^6 f(x) dx &= \int_{\frac{3}{2}}^3 (2x - 3) dx + \int_3^6 (-x^2 + 8x - 12) dx \\ &= [x^2 - 3x]_{\frac{3}{2}}^3 + \left[-\frac{x^3}{3} + 4x^2 - 12x\right]_3^6 = 2.25 + 9 = 11.25 \end{aligned}$$

B 3 Cálculo de probabilidades de un suceso. Ley de Laplace:

- $P(\text{blanca}) = 15/20 = 0'75$.
- $P(\text{dos blancas}) = 15/20 \cdot 14/19 = 21/38 = 0'552$.
- $P(\text{Si } 1^\circ \text{ es negra, } 2^\circ \text{ negra}) = 4/19 = 0'210$.
- $P(\text{dos bolas de color distinto}) = 15/20 \cdot 5/19 + 5/20 \cdot 15/19 = 0'394$.

B 4 Cálculo del intervalo de confianza de la media de una población que sigue una distribución normal:

a) $\hat{p} = 0'35$ $\hat{q} = 0'65$ $n_c = 0'95$ $n = 361$.
Cálculo de $Z_{\frac{\alpha}{2}}$: $\frac{1+n_c}{2} = \frac{1+0'95}{2} = 0'9750 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$.

$$Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \Rightarrow 1'96 \cdot \sqrt{\frac{0'35 \cdot 0'65}{361}} = 1'96 / 19 \sqrt{0'2275} = 0'049.$$

$$\text{I.C.} \equiv \left(\hat{p} - Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}}, \hat{p} + Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} \right) = (0'35 - 0'049, 0'35 + 0'049) = (0'301, 0'399).$$

b) Tamaño de la muestra "n"

$$n_c = 0'99 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}}: \frac{1+n_c}{2} = \frac{1+0'99}{2} = 0'9950 \Rightarrow Z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'575.$$

Si la amplitud del intervalo es 0'12, entonces, error = 0'06.

$$2'575 \cdot \sqrt{\frac{0'35 \cdot 0'65}{n}} = 0'06 \Rightarrow n = \left(\frac{2'575}{0'06} \right)^2 \cdot 0'35 \cdot 0'65 = 419'01 \Rightarrow n = 420.$$