OPCIÓN A

A 1 *(hasta 3 puntos)*
Consideramos la función lineal $F(x,y) = 15x + 6y$ definida en el plano XY y las siguientes restricciones:

$$6 \leq 2x + 3y \leq 29, \quad 0 \leq y \leq -1 + 2x, \quad 5x + 2y \leq 45.$$

a) Dibujar en el plano XY la región de soluciones factibles que cumplen las restricciones.
b) Hallar los máximos y mínimos de la función $F(x,y)$ en la región descrita en el apartado anterior.

A 2 *(hasta 3 puntos)*
El polinomio cúbico $f(x) = ax^3 + bx - 22$ pasa por el punto (1,0) y tiene un máximo en $x = 2$. Responder las siguientes preguntas:

a) Encontrar con la información anterior los coeficientes a y b.
b) Encontrar el mínimo y el máximo de la función $f(x)$ y hacer un esbozo de la gráfica del polinomio con todas sus características significativas.

A 3 *(hasta 2 puntos)*
Un productor de Ecuador y otro de Brasil trasladan cajas idénticas de una tonelada (tn) de peso a un almacén. Cada caja puede contener plátanos o café. El productor de Brasil aporta 600 cajas de plátanos y 1.200 de café y el de Ecuador aporta 750 cajas de plátanos y un número desconocido de cajas de café. Responder las siguientes preguntas:

a) ¿Cuántas toneladas de café habrá aportado Ecuador si el café es el 60 % del contenido del almacén?

Un cliente compra café de Ecuador dejando sólo 400 tn de este producto en el almacén.

b) Si alguien elige al azar consecutivamente dos cajas, ¿cuál es la probabilidad de que sean del mismo país?
c) ¿Qué probabilidad hay de que si una caja elegida al azar es de plátanos, su origen sea Ecuador?

A 4 *(hasta 2 puntos)*
En una muestra de 300 universitarios el 80 % ha respondido que acude semanalmente al cine.
a) ¿Entre qué valores se encuentra, con un nivel de confianza del 95 %, la proporción del total de universitarios que acude todas las semanas al cine?
b) ¿Y el intervalo para la proporción anterior con un nivel de confianza del 99 %?

OPCIÓN B

B 1 *(hasta 3 puntos)*

a) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ a & b \end{pmatrix}$, determinar los valores de los parámetros a y b para que se verifique la ecuación matricial $A^2 = 2A$.

b) Dadas las matrices $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcular la matriz $D=B^{50}\cdot C^T$ (C^T es la matriz traspuesta de C).

B 2 *(hasta 3 puntos)*

A lo largo de la semana una planta potabilizadora de agua aporta al depósito municipal una cantidad de litros expresada por la función $p(x) = 10x^2-100x+550$, donde $0 \leq x \leq 7$ representa el instante de la semana medido en días. De la misma manera, la demanda de agua se representa por la función $d(x) = -10x^2 + 80x + 240$. Por un lado el flujo de agua en el instante x es la diferencia entre lo aportado y lo extraído, es decir, $f(x) = p(x) - d(x)$ y por otro el excedente $e(r)$ es la cantidad de agua acumulada hasta el momento r, $e(r) = \int_0^r f(x)dx$. Responder:

a) ¿Cuál es el instante de mayor demanda?
b) ¿En qué intervalo de tiempo el flujo es negativo, es decir, el depósito se está vaciando?
c) ¿Cuál es el excedente al final de la semana ($r = 7$)?

B 3 *(hasta 2 puntos)*

Un concesionario vende vehículos de dos gamas: U (urbano) y L (lujoso). El 60 % son de la gama U; de éstos, el 4 % vienen con cambio automático (A), mientras que el resto de los de gama U son de cambio manual (M). En el stock total el porcentaje de vehículos con cambio automático A es el 5 % y de cambio manual M el 95 %.

a) Si se elige un vehículo al azar y tiene cambio automático, hallar la probabilidad de que sea urbano.
b) ¿Qué porcentaje de vehículos de lujo tienen cambio automático?

B 4 *(hasta 2 puntos)*

Las calificaciones de 1000 estudiantes sometidos a un test de inteligencia se distribuyen normalmente con media 70 y desviación típica 20. Calcular:

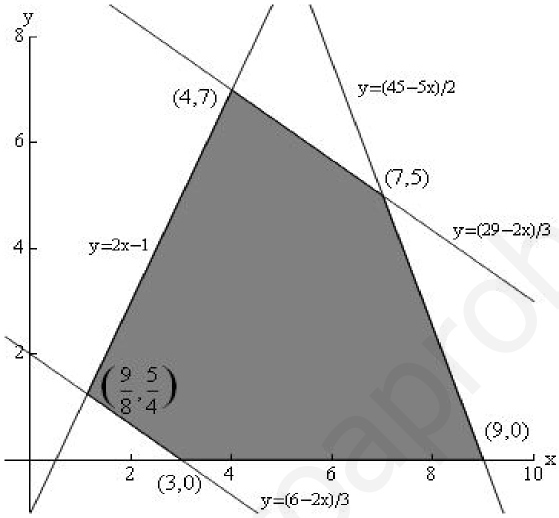
a) La probabilidad de que un estudiante obtenga más de 80 puntos.
b) La probabilidad de que un estudiante obtenga menos de 50 puntos.
c) ¿Cuál es, con una probabilidad del 95 %, la calificación máxima que se puede esperar alcanzar?

SOLUCIONES

OPCIÓN A

A 1 (*Resolución de un problema de programación lineal*)

a) La siguiente figura corresponde al dominio:



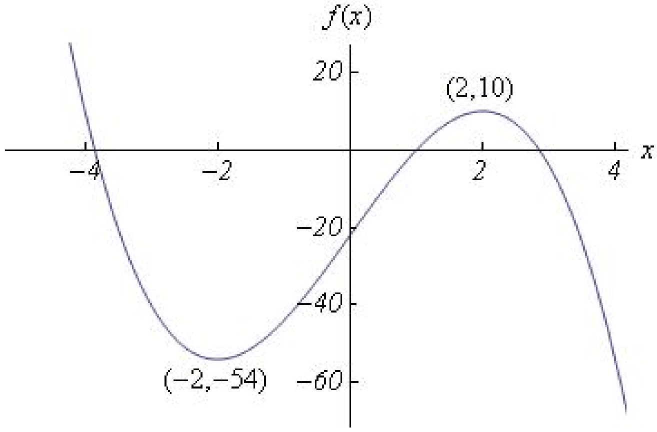
b) El mínimo se obtiene en el punto $F\left(\frac{9}{8},\frac{5}{4}\right) = 24{,}375$ y el máximo en todos los puntos (x,y) del segmento entre (7,5) y (9,0) y vale $F(x,y) = 135$.

A 2 (Cálculo de parámetros de una función. Interpretación)

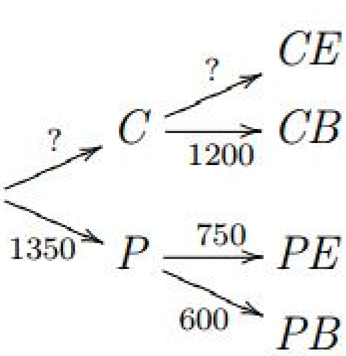
$$f(x) = ax^3 + bx - 22$$

a) $f'(x) = 3ax^2 + b$, en consecuencia $0 = f'(2) = 12a + b \Rightarrow b = -12a$
Además $0 = f(1) = a - 12a - 22 \Rightarrow a = -2,\ b = 24$

b) $f(x) = -2x^3 + 24x - 22 \Rightarrow f'(x) = -6x^2 + 24 \Rightarrow f''(x) = -12x$
$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \pm 2$ son los extremos de la función.
$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 0$ es el punto de inflexión.
$f''(2) = -24 \Rightarrow x = +2$ es el máximo y $f''(-2) = 24 \Rightarrow x = -2$ el mínimo.
$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ eta $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \infty$



A 3 *(Ejercicio de cálculo de probabilidades que puede resolverse mediante un diagrama de árbol y la probabilidad condicional)*



Para definir el árbol:

CE Toneladas de café de Ecuador,

CB Toneladas de café de Brasil,

PE Toneladas de plátanos de Ecuador,

PB Toneladas de plátanos de Brasil,

P=plátano, *C*=café, *B*=Brasil, *E*=Ecuador

a) $60\% = \frac{60}{100} = \frac{CE+1200}{CE+1200+750+600} \Rightarrow CE = 825$

b) Siendo $CE = 400$, en total hay 400+750+1200+600 = 2950 cajas. Denominando $A1$ y $A2$ la primera y segunda caja respectivamente,

$$p(A1 = B) \cdot p(A2 = B|A1 = B) + p(A1 = E) \cdot p(A2 = E|A1 = E)$$
$$= \frac{1150}{2950} \cdot \frac{1149}{2949} + \frac{1800}{2950} \cdot \frac{1799}{2949} = 0{,}5241$$

c) $p(E|P) = p(P|E)\frac{p(E)}{p(P)} = \frac{750}{1150} \cdot \frac{1150/2950}{1350/2950} = \frac{750}{1350} = 0{,}5556$

A 4 *(Cálculo del intervalo de confianza de una población. Se necesita conocer la formula correspondiente y saber aplicarla)*

Y=X/N es la proporción de la población de N individuos. El tamaño de la muestra es $n = 300, (n \geq 30)$ y la proporción de la muestra $\hat{Y} = 0{,}8$.

$$Y = N\left(\hat{Y}, \sqrt{\hat{Y}(1-\hat{Y})/N}\right) = N(0.8\,, 0.0231) \Rightarrow Z = \frac{Y - 0.8}{0.0231} = N(0{,}1)$$

a) El intervalo de confianza al 95 % de Y:
$(z_{-0{,}025}, z_{0{,}025}) = (-1.96\,,\ 1.96) \Rightarrow 0.755 < Y < 0.845$

b) El intervalo de confianza al 99 % de Y:
$$(z_{-0{,}005}, z_{0{,}005}) = (-2.58\,, 2.58) \Rightarrow 0.74 < Y < 0.86$$

OPCIÓN B

B 1 *(Ejercicio de cálculo matricial)*

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 9-3a & -9-3b \\ 3a+ab & -3a+b^2 \end{pmatrix}$, $2A = \begin{pmatrix} 6 & -6 \\ 2a & 2b \end{pmatrix}$

$$A^2 = 2A \implies a = 1\,, b = -1$$

b) El producto de las matrices propuestas resulta una matriz como la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a+b & 1 \end{pmatrix}$$

Repitiendo el proceso $B^{n+1} \cdot C^T = B \cdot (B^n \cdot C^T)$ se obtiene este resultado:

$$B \cdot C^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B^2 \cdot C^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \cdots, B^{50} \cdot C^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -48 & 1 \end{pmatrix}$$

B 2 *(Ejercicio de cálculo de los valores de una función y su máximo. Interpretación)*

a) Demanda máxima de agua es en el instante $d'(x) = -20x + 80 = 0 \Rightarrow x = 4$.

b) Para que el flujo sea negativo:

$p(x) - d(x) < 0 \Leftrightarrow 20x^2 - 180x + 310 < 0 \Leftrightarrow 2{,}32 < x < 6{,}68$

c) Excedente: $\int_0^7 f(x)\ dx = \left[\frac{20x^3}{3} - 90x^2 + 310x\right]_0^7 = \frac{140}{3} = 46{,}67$

B 3 *(Ejercicio de cálculo de probabilidades que se puede resolver con una tabla de doble entrada)*

	A	**M**	suma
U	2,4	57,6	60
L	2,6	37,4	40
suma	5	95	

a) $p(U|A) = \frac{p(U \cap A)}{p(A)} = \frac{0{,}024}{0{,}05} = 0{,}48 = 48\%$

b) $p(A|L) = \frac{p(A \cap L)}{p(L)} = \frac{0{,}026}{0{,}4} = 0{,}065 = 6{,}5\%$

B 4 *(Comprensión y utilización de la distribución normal)*

La calificación de un estudiante sigue una distribución normal $X = N(70{,}20)$ y $Z = (X - 70)/20 = N(0{,}1)$ es la variable estandarizada.

a) Probabilidad de obtener más de 80 puntos:

$$p(X > 80) = p(Z > 0{,}5) = 1 - p(Z \leq 0{,}5) = 0{,}3085$$

b) Probabilidad de obtener menos de 50 puntos:

$$p(X < 50) = p(Z < -1) = 0{,}1587$$

c) La máxima calificación que se puede esperar con una probabilidad del %95:

$$p(X \leq n) = 0{,}95 \Rightarrow p\left(\frac{X - 70}{20} \leq \frac{n - 70}{20}\right) = 0{,}95 \Rightarrow \frac{n - 70}{20} = 1{,}64 \Rightarrow n = 102{,}8$$