OPCIÓN A

A 1 *(hasta 3 puntos)*
A la compañía de transportes que lleva a la escuela municipal los 160 jóvenes de su alumnado, un servicio de un autobús de 40 plazas le supone un gasto de 120€ y uno de un microbús de 20 plazas sólo 80€. Se debe decidir el número de autobuses *X* y microbuses *Y* que transporten a todo el alumnado, minimizando el gasto y cumpliendo ciertas limitaciones: la compañía sólo cuenta con 5 conductores de autobús (aptos para conducir microbuses) y otros 7 conductores de microbús (no aptos para conducir autobuses). Además las autoridades de tráfico obligan a que circulen al menos el doble de microbuses que de autobuses. Se pide:

a) Representar en el plano *XY* la región de soluciones factibles del problema.
b) Encontrar el número óptimo de autobuses *X* y microbuses *Y* que minimizan el gasto de la empresa y cumplen con las restricciones. Calcular dicho gasto.

A 2 *(hasta 3 puntos)*
Dos curvas representadas por las funciones $f(x) = \frac{A}{x+9}$, $g(x) = \frac{Bx}{x^2+6x+\alpha}$ dependen de los parámetros desconocidos A, B y α. Responder:

a) ¿Qué valores de *A* y *B* hacen que las curvas *f(x)* y *g(x)* pasen por el punto (1,1/2) y tomen valores iguales en el punto *x*=5, es decir, *f*(5)=*g*(5) ?
b) Calcula los máximos y mínimos de *f(x)* y *g(x)*.
c) Indica los dominios de definición de *f(x)* y *g(x)*.

A 3 *(hasta 2 puntos)*
En mi ciudad llueve uno de cada tres días. Cuando llueve se producen atascos y la probabilidad de llegar tarde al trabajo es de 2/3. En cambio, cuando no llueve la probabilidad de llegar tarde al trabajo es de 1/8. Responder:

a) ¿Cuál es la probabilidad de llegar tarde al trabajo?
b) Hoy he llegado tarde al trabajo, ¿cuál es la probabilidad de que haya llovido?
c) Sabiendo que ayer llovió y hoy no lo ha hecho, ¿cuál es la probabilidad de que haya llegado al trabajo uno de los dos días tarde y el otro puntual?

A 4 *(hasta 2 puntos)*
En unas pruebas clasificatorias de salto de longitud para una olimpiada la media de los primeros 400 intentos es de 7,75 m. Se sabe que los saltos se comportan como una variable aleatoria que sigue una distribución normal con varianza $\sigma^2 = 0{,}36\ m^2$.

a) Construye un intervalo, de un 95% de confianza, para la media μ de los saltos de la población.
b) ¿Cuál sería el mínimo tamaño muestral necesario para que pueda decirse que la verdadera media de los saltos está a menos de 4 cm de la media muestral, con un nivel de confianza del 90%?

OPCIÓN B

B 1 *(hasta 3 puntos)*
Considérense las siguientes matrices y los parámetros desconocidos u y v:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & u \\ v & -2 \end{pmatrix}$$

a) Determinar los valores de los parámetros α, β, u y v para que se cumpla la siguiente igualdad matricial, siendo B^T la matriz traspuesta de B:

$$A\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}B^T + C\begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} = D$$

b) Siendo A^{-1} la matriz inversa de A, encontrar los valores de las constantes a y b que verifiquen:

$$A^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

B 2 *(hasta 3 puntos)*
Para financiar el viaje de fin de curso un instituto propone la venta de camisetas. Se ha hecho un estudio previo y se sabe que el número de camisetas NC que se vendan dependerá del precio x (en €) según la función $NC(x) = 180 - 10\,x$, $0 \leq x \leq 18$.

a) ¿Cuántas camisetas se venderían a 10€? Interpreta el aumento o disminución del número de camisetas vendidas por cada euro que aumente o disminuya el precio.
b) Obtén la función que expresa los ingresos por la venta. ¿Para qué precio los ingresos son máximos? ¿Cuántas camisetas se venderían en este caso?
c) El almacén que suministra camisetas nos cobra en total $C(z)$=4 z +50 euros por un pedido de z camisetas. Obtén el coste total pagado al almacén por las camisetas vendidas en función del precio de venta x. Obtén la función de beneficio (en función de x) y el precio x para conseguir el máximo beneficio.

B 3 *(hasta 2 puntos)*
En un bingo han sustituido el clásico dado en forma de cubo por uno nuevo en forma de dodecaedro. En las 12 caras del dado se alternan los números 1, 2, 3, 4 y el 5. El 1 aparece en una cara, el 2 en una cara, el 3 en dos caras, el 4 en tres caras y el 5 en cinco caras. Si el dado está equilibrado, es decir, la probabilidad de que al lanzarlo salga cualquier cara es la misma, calcula:

a) Si se lanza dos veces el dado, ¿cuál es la probabilidad de que salgan dos números impares?
b) Si se lanza tres veces el dado, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de los números aparecidos sea 6?

B 4 *(hasta 2 puntos)*
La estación meteorológica de una ciudad indica que la temperatura máxima de los días de agosto sigue una distribución normal de media 28^{o}C y desviación típica 4^{o}C. Se pide:

a) La probabilidad de que un día de agosto la temperatura máxima sea mayor que 32^{o}C
b) En el mes de agosto de un año concreto, ¿cuál es el número de días en que se espera una temperatura máxima inferior a 25^{o}C?
c) La probabilidad de que un día de agosto la temperatura máxima esté entre 28^{o}C y 32^{o}C
d) ¿Cuál es, con una probabilidad del 95%, el valor que no será superado por la temperatura máxima de un día de agosto?

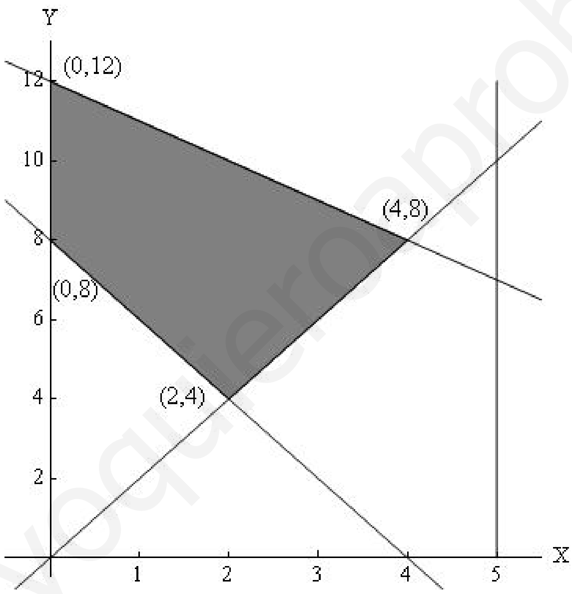
SOLUCIONES

OPCIÓN A

A 1 (Resolución de un problema de programación lineal)

a) Las restricciones lineales del problema y la región de soluciones son:

i) Cantidad autobuses $X \leq$ cantidad conductores de autobús: $0 \leq X \leq 5$,
ii) Cantidad microbuses $Y \leq$ Cantidad conductores de microbús: $0 \leq Y \leq 12$,
iii) Por cada autobús activo hay un microbús activo menos: $Y \leq 12 - X$,
iv) Cantidad de microbuses ≥ doble de autobuses: $2X \leq Y$,
v) 40 × autobuses + 20 × microbuses ≥ 160 alumnos: $40X + 20Y \geq 160$.



b) Mínimo de la función de costo $F(X,Y)=120X+80Y$, $F(2,4)=560$ en $(X,Y)=(2,4)$.

A 2 (Cálculo de parámetros de una función, de sus extremos y dominio de definición)

a)

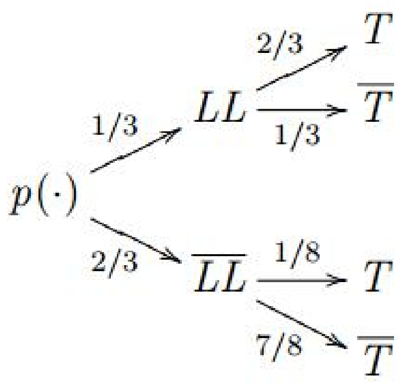
$$\left\{\begin{array}{c} f(1)=\dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; \dfrac{A}{10}=\dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; A=5 \\ g(1)=\dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; \dfrac{B}{7+\alpha}=\dfrac{1}{2} \;\rightarrow\; \alpha=2B-7 \\ f(5)=g(5) \;\rightarrow\; \dfrac{5}{14}=\dfrac{5B}{55+\alpha} \;\rightarrow\; B=4, \alpha=1 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{c} f(x)=\dfrac{5}{x+9} \\ g(x)=\dfrac{4x}{x^2+6x+1} \end{array}\right.$$

b) Calculando las derivadas de las funciones se deduce que *f(x)* no tiene extremos y *g(x)* tiene un máximo en $x = 1$ y un mínimo en $x = -1$.

c) Dominio de existencia de *f(x)* es $\mathbb{R} - \{-9\}$ y el de *g(x)* $\mathbb{R} - \{-3-\sqrt{8}, -3+\sqrt{8}\}$.

A 3 *(Ejercicio de cálculo de probabilidades que puede resolverse mediante un diagrama de árbol y la probabilidad condicional)*

Sean $LL, \overline{LL}, T, \bar{T}$ y T_i respectivamente los sucesos correspondientes a un día lluvioso, uno no lluvioso, llegar tarde al trabajo, no legar tarde al trabajo y llegar tarde al trabajo el día i-ésimo, entonces las probabilidades demandadas son:



a) $p(T) = p(LL) \cdot p(T|LL) + p(\overline{LL}) \cdot p(T|\overline{LL})$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{11}{36}$$

b) $p(LL|T) = \frac{p(LL \cap T)}{p(T)} = \frac{2/9}{11/36} = \frac{8}{11}$

c) $p(T_1|LL)p(\bar{T}_2|\overline{LL}) + p(\bar{T}_1|LL)p(T_2|\overline{LL})$
$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

A 4 *(Comprensión y utilización de una distribución normal)*

$X = N(\mu, \sigma)$: variable aleatoria correspondiente a la longitud del salto, μ su media y σ = 0,6 su desviación estándar. n = 400 es el tamaño de la muestra y $\bar{x}$ = 7,75 su media. La media tiene distribución normal $N\left(\mu, \frac{0{,}6}{20}\right)$.

a) El intervalo de confianza al 95% de μ:
$$\left(\bar{x} - z_{0.025}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{0.025}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (7{,}69\ , 7{,}81)$$

b) $|\mu - \bar{x}| \leq 1{,}65 \cdot \frac{0{,}6}{\sqrt{n}} \leq 0{,}04 \Rightarrow n \geq \left(\frac{1{,}65 \cdot 0{,}6}{0{,}04}\right)^2 = 612{,}5 \Rightarrow n \geq 613$

OPCIÓN B

B 1 *(Ejercicio de cálculo matricial)*

a) De la ecuación matricial se deduce el siguiente sistema lineal:

$$\left.\begin{cases} -2\beta = 2 \\ -4\alpha - 2\beta = u \\ 10\beta = v \\ 2\alpha + 6\beta = -2 \end{cases}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \beta = -1 \\ \alpha = 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} u = -6 \\ v = -10 \end{matrix}\right\}$$

b) Multiplicando ambos lados de la ecuación por la matriz A :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = AB\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} -2b = 0 \\ 3a + b = 3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} b = 0 \\ a = 1 \end{matrix}\right\}$$

B 2 *(Ejercicio de evaluación de una función y cálculo de su máximo. Interpretación)*

a) NC(10) = 80. Por cada euro que se incrementa el precio, se venderán 10 camisetas menos que antes.

b) Ingresos: $I(x) = x(180 - 10x) = 180x - 10x^2$.

Derivada: $I'(x) = 180 - 20x$ e $I'(9) = 0$, $I''(x) = -20$. Consecuentemente los ingresos máximos se consiguen cuando $x = 9$, vendiéndose 90 camisetas.

c) El coste de $180 - 10x$ unidades es $C(x) = 4(180 - 10x) + 50 = 770 - 40x$.

beneficio = ingresos – coste = $B(x) = -10x^2 + 220x - 770$.

El máximo se logra con $B'(x) = -20x + 220 = 0 \Rightarrow x = 11$ euros.

B 3 *(Ejercicio de cálculo de probabilidades. Dos sucesos independientes)*

a) Casos de los dos números impares: {1,1}, {3,3}, {5,5}, {1,3}, {3,1}, {1,5}, {5,1}, {3,5} y {5,3}. Suma de las probabilidades de los casos:

$$p(\text{impares}) = \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{12}+\frac{2}{12}\cdot\frac{2}{12}+\frac{5}{12}\cdot\frac{5}{12}$$
$$+2\left(\frac{1}{12}\cdot\frac{2}{12}+\frac{1}{12}\cdot\frac{5}{12}+\frac{2}{12}\cdot\frac{5}{12}\right)=\frac{64}{12^2}=0{,}44$$

b) Opciones para que la suma de tres números sea 6: 6 permutaciones de los números {1,2,3} más tres de los números {1,1,4} más una de los números{2,2,2}:

$$p(\text{suma}=6)=6\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{2}{12}+3\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{3}{12}+\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{12}=\frac{22}{12^3}=0{,}0127$$

B 4 *(Comprensión y utilización de la distribución normal)*

$$X = N(\mu = 28, \sigma = 4) \ \Rightarrow Z = (X-28)/4 = \ N(0,1)$$

a) Probabilidad de que la temperatura máxima de un día de agosto sea mayor que 32ºC:

$$p(X > 32) = p(Z > 1) = 1 - p(Z \le 1) = 0{,}1587$$

b) Agosto tiene 31 días y la probabilidad de que en cada uno de ellos la temperatura máxima sea menor que 25ºC:
$p(X < 25) = p(Z < -3/4) = 0{,}2266 \Rightarrow$ 31 días por $0{,}2266 = 7{,}02 \sim$ 7 días.

c) Probabilidad de que la temperatura máxima de un día de agosto se encuentre entre 28ºC y 32ºC:

$$p(28 \le X \le 32) = p(0 \le Z \le 1) = 0{,}3413$$

d) El valor que con una probabilidad del 95% no será superado por la temperatura máxima de un día de agosto:

$$p(X < t) = 0{,}95 \Rightarrow p\left(\frac{X-28}{4} \le \frac{t-28}{4}\right) = 0{,}95 \Rightarrow \frac{t-28}{4} = 1{,}64 \Rightarrow t = 34{,}56\ \text{ºC}$$