

A 1 *[[hasta 2,5 puntos]]*

Se considera la ecuación matricial:

$$A \cdot X = A^t \cdot B \quad \text{donde } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y } B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

- [[0,5 puntos]]** ¿Qué dimensión debe tener la matriz X ?
- [[2 puntos]]** Resuelve la ecuación matricial.

A 2 *[[hasta 2,5 puntos]]*

Sea $f(x)$ la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ ax + 2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

- [[1 punto]]** Determina el valor del parámetro a para que la función $f(x)$ sea continua en el punto $x = 1$.
- [[0,5 puntos]]** Realiza la representación gráfica de la función cuando $a = 2$.
- [[1 punto]]** Calcula el área comprendida entre la función y el eje de abscisas OX para $a = 2$.

A 3 *[[hasta 2,5 puntos]]*

En una caja hay una bola roja y una bola azul. Se han extraído dos bolas de la caja como se explica a continuación: se ha extraído una bola, y antes de sacar la segunda se ha devuelto a la caja la primera bola extraída, añadiendo otra bola del mismo color.

- [[0,75 puntos]]** Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraída sea roja si la primera que se ha sacado era azul.
- [[1 punto]]** Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraída sea azul.
- [[0,75 puntos]]** Si la segunda bola ha sido azul, ¿cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída haya sido roja?

A 4 *[[hasta 2,5 puntos]]*

La altura en centímetros de las mujeres de un determinado país sigue una distribución normal de media 163 cm y desviación típica 7 cm.

- [[1,5 puntos]]** Si se toma una mujer al azar, ¿cuál es la probabilidad de que su altura sea superior a 171 cm? ¿Y de que su altura esté comprendida entre 155 y 171 cm?
- [[1 punto]]** Una empresa que fabrica disfraces quiere elaborar cuatro tallas en función de la altura, de tal modo que cada una de ellas sea adecuada para el 25 % de las mujeres. ¿Cuáles serán las alturas que marcarán el cambio de una talla a otra?

B 1 *[[hasta 2,5 puntos]]*

Un guía de turismo quiere adquirir tickets de diferentes actividades para sus clientes. En concreto, quiere comprar al menos 16 tickets para acudir a un museo, 20 para realizar una visita guiada y 16 para asistir a un espectáculo.

Dos agencias disponen de ofertas para dichos tickets combinados en paquetes:

- ◆ La agencia A ofrece paquetes formados por 6 tickets para el museo, 4 para la visita guiada y 4 para el espectáculo, a 210 € cada paquete.
- ◆ La agencia B ofrece paquetes formados por 4 tickets para el museo, 6 para la visita guiada y 4 para el espectáculo, a 230 € cada paquete.

¿Cuántos paquetes deberá comprar el guía a cada agencia para que su coste sea mínimo? ¿A cuánto asciende dicho coste?

B 2 *[[hasta 2,5 puntos]]*

Sea la siguiente función $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

- a) **[[1 punto]]** Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos relativos de la función.
- b) **[[0,5 puntos]]** Calcula las asíntotas verticales y horizontales de la función.
- c) **[[0,5 puntos]]** Representa gráficamente el área comprendida entre la función y la recta $y = \frac{x}{2}$.
- d) **[[0,5 puntos]]** Obtén la primitiva de la función $f(x)$, sabiendo que en $x = 0$ toma el valor 1.

B 3 *[[hasta 2,5 puntos]]*

Sean A y B dos sucesos compatibles asociados a un experimento aleatorio.

Se sabe que $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,5$ y $P(A \cap B) = 0,4$. Calcula:

- a) **[[0,65 puntos]]** $P(A \cup B)$
- b) **[[0,6 puntos]]** $P(A^c \cap B^c)$
- c) **[[0,6 puntos]]** $P(A^c \cap B)$
- d) **[[0,65 puntos]]** $P(A|B)$

B 4 *[[hasta 2,5 puntos]]*

El peso de las truchas de una piscifactoría sigue una distribución normal de media 250 gramos y desviación típica 50 gramos. Únicamente son aptas para la venta aquellas que superan un determinado peso.

- a) **[[1,25 puntos]]** ¿Cuál debería ser ese peso si se quiere que el 40 % de las truchas de la piscifactoría sean aptas para la venta?
- b) **[[1,25 puntos]]** Si dicho peso se establece en 280 gramos y en la piscifactoría hay un total de 6000 truchas, ¿cuántas de ellas se podrán poner a la venta?

SOLUCIONES

A 1 Dimensión de una matriz. Cálculo matricial. Ecuación matricial.

a) Dimensión de la matriz X , esto es, $X \in \mathcal{M}_{m \times n}$

$$\star A \in \mathcal{M}_3 \Rightarrow A^t \in \mathcal{M}_3$$

$$\star A^t \in \mathcal{M}_{3 \times 3} \wedge B \in \mathcal{M}_{3 \times 1} \Rightarrow A^t \cdot B \in \mathcal{M}_{3 \times 1}$$

$$\star A \cdot X = A^t \cdot B \in \mathcal{M}_{3 \times 1} \Rightarrow A \cdot X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}$$

$$\circ A \in \mathcal{M}_{3 \times 3} \wedge X \in \mathcal{M}_{m \times n} \Rightarrow \exists A \cdot B \quad m = 3$$

$$\circ A \in \mathcal{M}_{3 \times 3}, X \in \mathcal{M}_{3 \times n} \wedge A \cdot X \in \mathcal{M}_{3 \times 1} \Rightarrow n = 1$$

$$\Rightarrow X \in \mathcal{M}_{3 \times 1}$$

b) Resolución de la ecuación matricial: $A \cdot X = A^t \cdot B$.

$$\star |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$\star (Adj A)^t$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\star A^{-1} = \frac{1}{|A|} (Adj A)^t = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} -4 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\star AX = A^t \cdot B \Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}A^tB \Rightarrow X = A^{-1}A^tB$$

$$\star A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$X = \left[\begin{pmatrix} -4 & -2 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 8 & -8 \\ 6 & -3 & 4 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -29 \\ 14 \\ -4 \end{pmatrix}$$

A 2 Continuidad de una función. Representación gráfica. Cálculo de los valores de una función y del área que forma con el eje de abscisas

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ ax + 2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

a) a tal que $f(x)$ continua en $x = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$

✚ $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1$

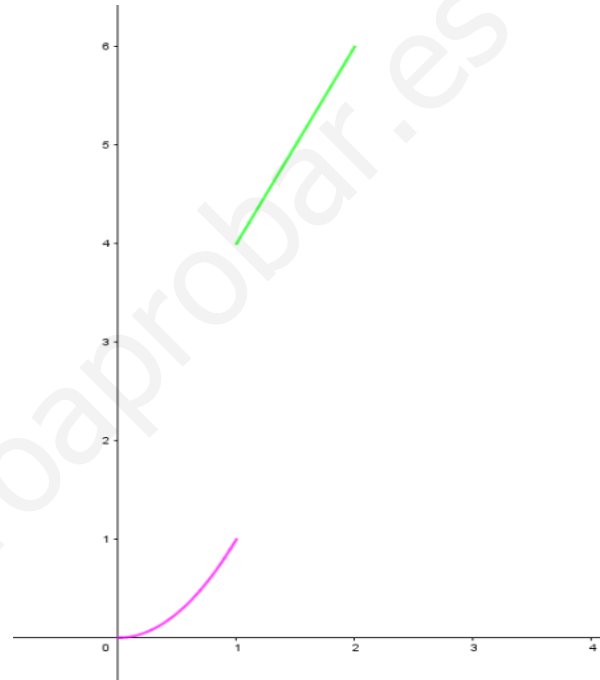
✚ $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax + 2) = a + 2$

✚ $f(1) = 1^2 = 1$

✚ Por lo tanto, $a + 2 = 1 \Rightarrow a = -1$

b) Representación gráfica de la función cuando $a = 2$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2x + 2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases}$$



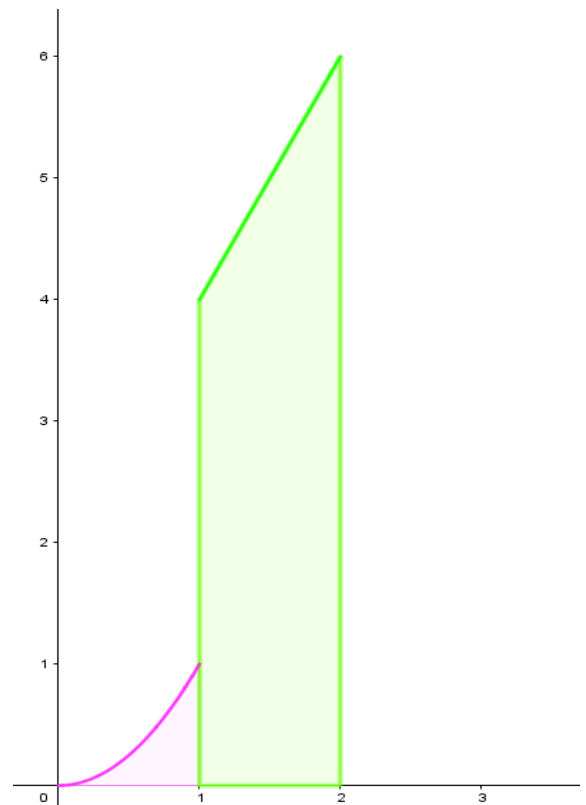
c) Área comprendida entre la función y el eje de abscisas OX:

✚ $A = A_1 + A_2$

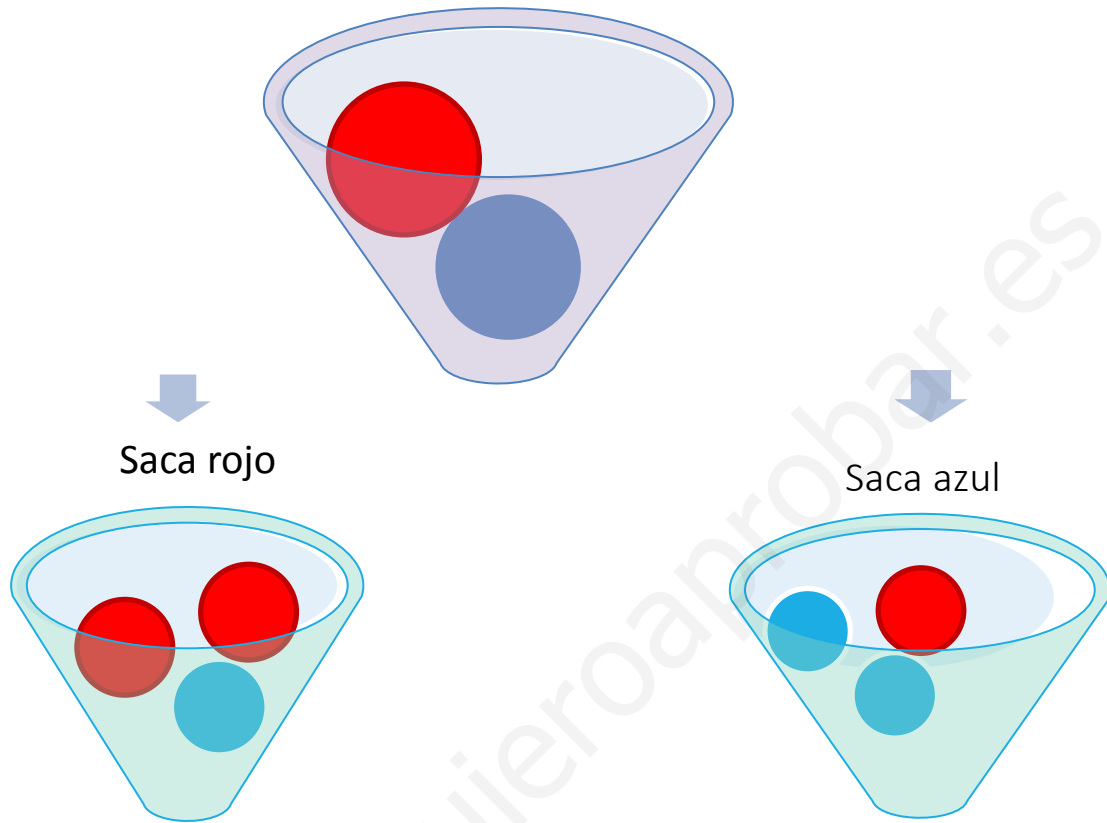
✚ $A_1 = \int_0^1 (x^2 - 0) dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} u^2$

✚ $A_2 = \int_1^2 (2x + 2 - 0) dx = \left[\frac{2x^2}{2} + 2x \right]_1^2 =$
 $= [x^2 + 2x]_1^2 = (4 + 4) - (1 + 2) =$
 $= 5 u^2$

✚ Esto es: $A = \left(\frac{1}{3} + 5 \right) u^2 = \frac{16}{3} u^2$



A 3 Cálculo de probabilidades; probabilidad total y probabilidad a posteriori.



Sucesos;

A_1 = la primera bola azul

A_2 = la segunda bola azul

R_1 = la primera bola roja

R_2 = la segunda bola roja

- a) Probabilidad de que la segunda bola extraída sea roja si la primera que se ha sacado ha sido azul: $P(R_2|A_1)$

$$P(R_2|A_1) = \frac{1}{3}$$

- b) Probabilidad de que la segunda bola extraída sea azul: $P(A_2)$

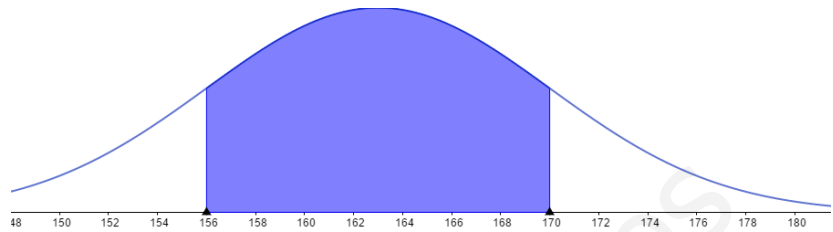
$$P(A_2) = P(R_1) P(A_2|R_1) + P(A_1) P(A_2|A_1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{2}$$

- c) Si la segunda bola ha sido azul la probabilidad de que la primera fuera roja: $P(R_1|A_2)$

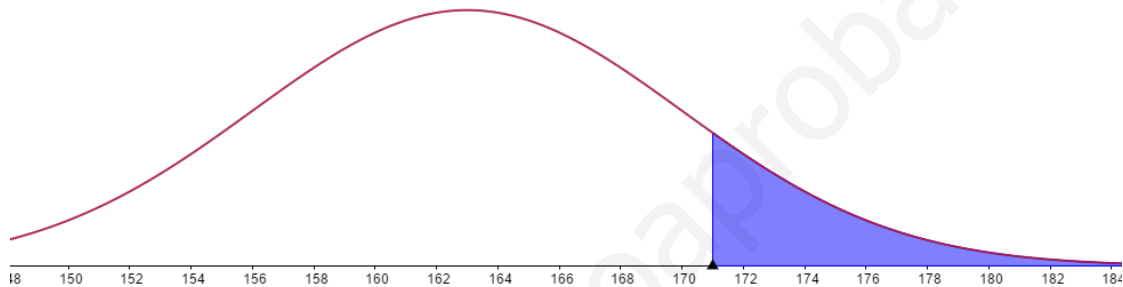
$$P(R_1|A_2) = \frac{P(R_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{P(R_1) P(A_2|R_1)}{P(A_2)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

A 4 Comprensión y utilización de una distribución normal.

a) $X \equiv \text{altura} \sim N(\mu, \sigma) = N(163, 7)$

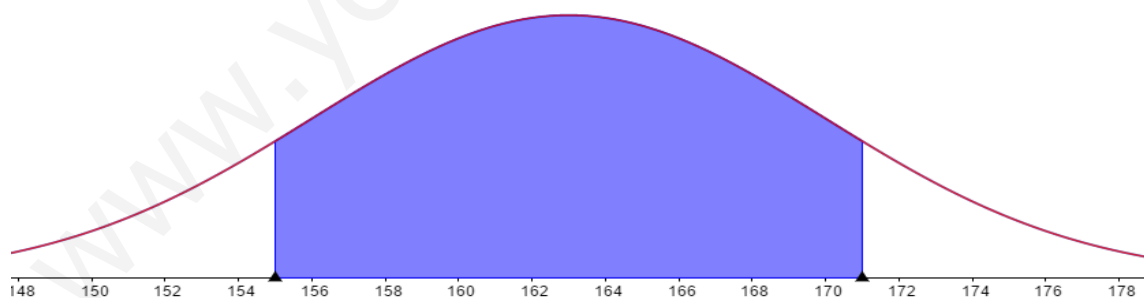


• $P(X > 171)$?



$$P(X > 171) = P\left(\frac{X - 163}{7} > \frac{171 - 163}{7}\right) = P(Z > 1,14) = 1 - P(Z \leq 1,14) = \\ = 1 - 0,8729 = \mathbf{0,1271}$$

• $P(155 \leq X \leq 171)$?

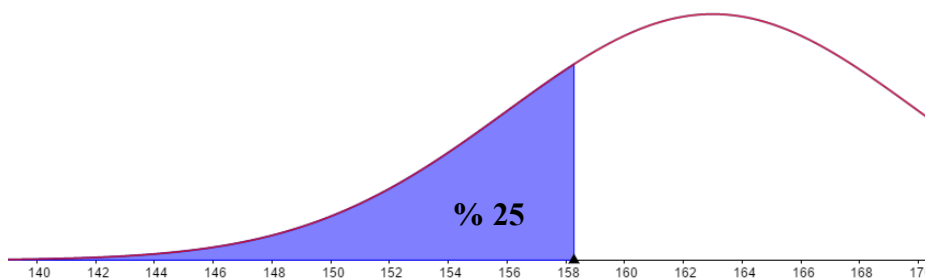


$$P(155 \leq X \leq 171) = P\left(\frac{155 - 163}{7} \leq \frac{X - 163}{7} \leq \frac{171 - 163}{7}\right) = P(-1,14 \leq X \leq 1,14) \\ = 0,8729 - (1 - 0,8729) = \mathbf{0,7458}$$

b) Cálculo de las alturas que marcan el paso de una talla a otra.

Se deben determinar los puntos a, b y c tales que: $P(X \leq a) = 0,25$, $P(X \leq b) = 0,5$ y $P(X \leq c) = 0,75$.

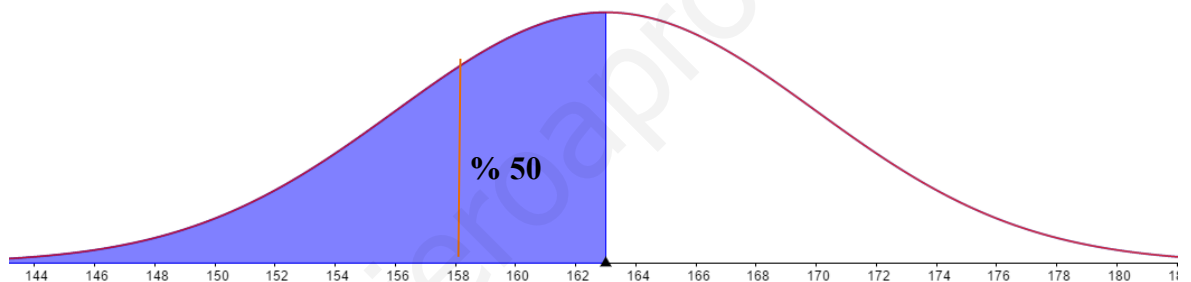
• a ? tal que $P(X \leq a) = 0,25$



$$P(X < a) = 0,25 \Rightarrow P\left(\frac{X - 163}{7} \leq \frac{a - 163}{7}\right) = 0,25 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a - 163}{7}\right) = 0,25$$

$$\Rightarrow \frac{a - 163}{7} = -0,675 \Rightarrow \mathbf{a = 158,275}$$

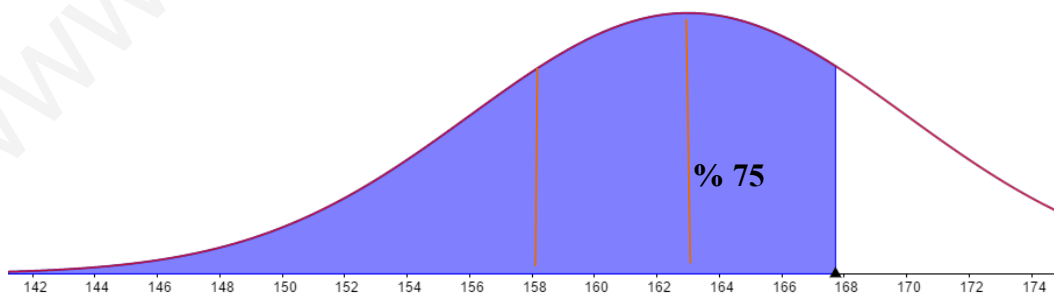
- b ? tal que $P(X \leq b) = 0,5$



$$P(X < b) = 0,5 \Rightarrow P\left(\frac{X - 163}{7} \leq \frac{b - 163}{7}\right) = 0,5 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{b - 163}{7}\right) = 0,5$$

$$\Rightarrow \frac{b - 163}{7} = 0 \Rightarrow \mathbf{b = 163}$$

- c ? tal que $P(X \leq c) = 0,75$



$$P(X < c) = 0,75 \Rightarrow P\left(\frac{X - 163}{7} \leq \frac{c - 163}{7}\right) = 0,75 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{c - 163}{7}\right) = 0,75$$

$$\Rightarrow \frac{c - 163}{7} = 0,675 \Rightarrow \mathbf{c = 167,725}$$

Por lo tanto, las tres alturas que marcarán el paso de una talla a la siguiente son **158,275 cm**, **163 cm** y **167,725 cm**.

B 1 Problema de programación lineal con dos variables:

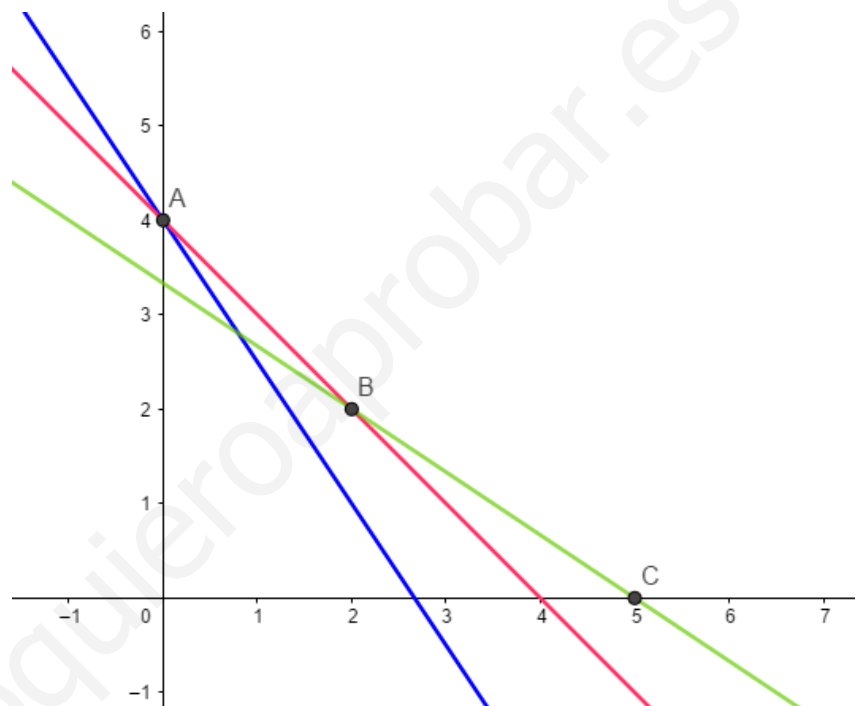
	MUSEO	VISITA GUIADA	ESPECTÁCULO	PRECIO	CANTIDAD
A	6	4	4	210 €	x
B	4	6	4	230 €	y

✚ La función objetivo es:

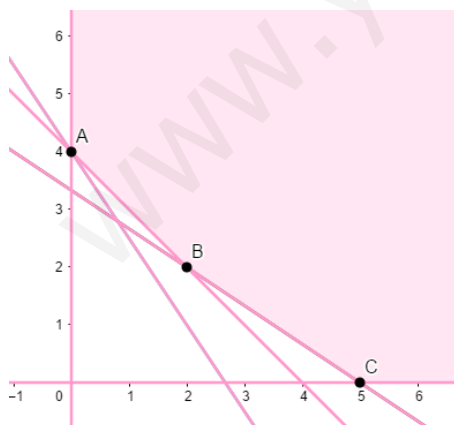
$$f(x, y) = 210x + 230y$$

✚ Las restricciones son:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 6x + 4y \geq 16 \\ 4x + 6y \geq 20 \\ 4x + 4y \geq 16 \end{cases}$$



✚ En el plano XY la región factible es:



✚ Por lo tanto, los vértices son:

$$A(0, 4), B(2, 2), C(5, 0)$$

$$\text{✚ } f(A) = f(0, 4) = 920$$

$$f(B) = f(2, 2) = 880$$

$$f(C) = f(5, 0) = 1050$$

✚ Por lo tanto, el valor mínimo de la función se

obtiene en el punto **B(2, 2)**, y consecuentemente, el guía tiene que comprar dos paquetes a cada agencia para conseguir el coste mínimo, esto es, **880 euros**.

B 2 Problema de análisis de una función. Cálculo de la función primitiva de una función.

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

a) Estudiamos el crecimiento de la función, a través del signo de $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2}$$

$f(x)$ es creciente cuando $f'(x) > 0$

$$\frac{-x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} > 0 \Rightarrow -x^2 + 1 > 0 \Rightarrow (x + 1)(x - 1) < 0 \Rightarrow$$

	-1	1	
	-2	0	2
$(x + 1)$	-	+	+
$(x - 1)$	-	-	+
$(x + 1)(x - 1)$	+	-	+
$f(x)$	↓	↑	↓

Por lo tanto, $f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ y creciente en $(-1, 1)$

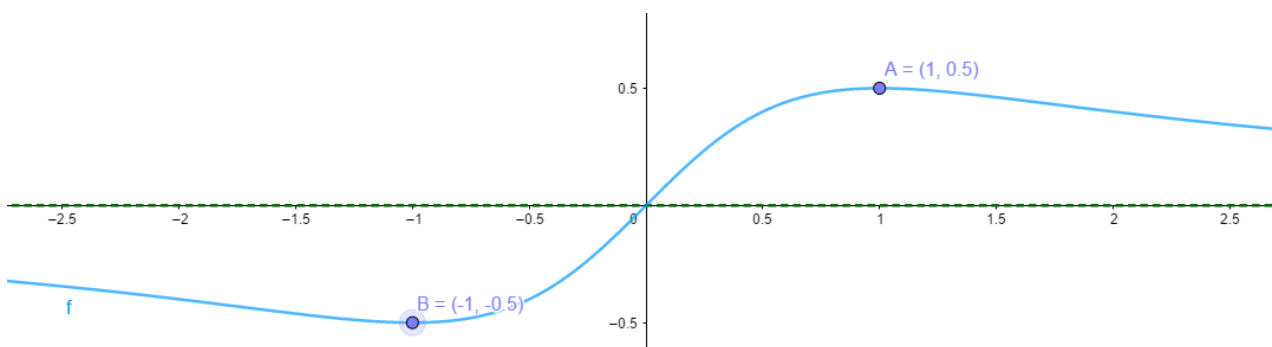
• Máximos y mínimos relativos:

$f(x)$ es continua en \mathbb{R} , es decreciente en el intervalo $(-\infty, -1)$ y creciente en $(-1, 1)$, por lo tanto, en el punto de abscisa $x = -1$ la función tiene un mínimo relativo.

$$f(-1) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \text{el punto } (-1, -\frac{1}{2}) \text{ es un mínimo relativo.}$$

En el intervalo $(-1, 1)$ la función es creciente y en $(1, \infty)$ es decreciente, por lo tanto, en el punto de abscisa $x = 1$ la función tiene un máximo relativo.

$$f(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{el punto } (1, \frac{1}{2}) \text{ es un máximo relativo.}$$

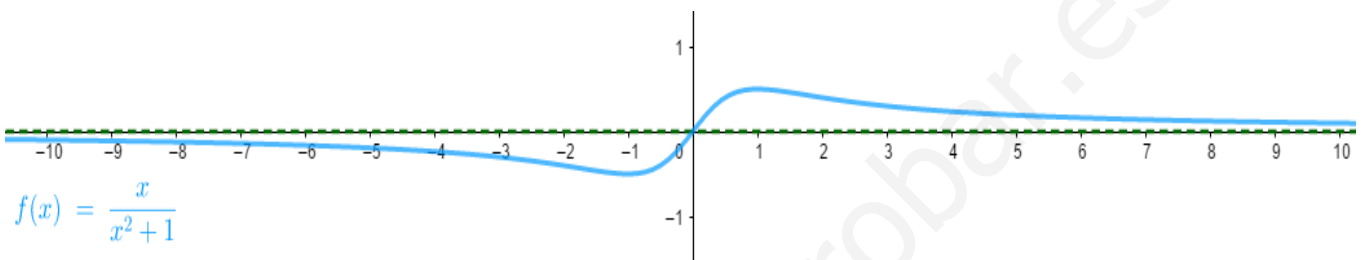


a. Asíntotas verticales:

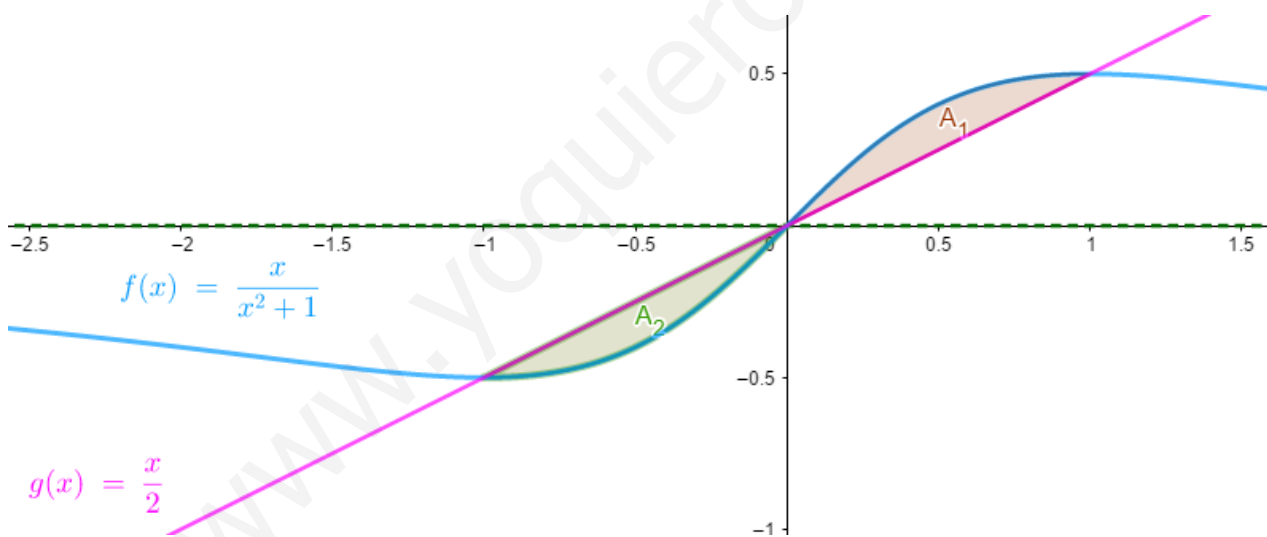
El dominio de definición de $f(x)$ es $\mathbb{R} \Rightarrow \nexists x_0$ tal que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm \infty$, por lo tanto, la función no tiene asíntotas verticales.

b. Asíntotas horizontales:

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$, por lo tanto, $y = 0$ asíntota horizontal.



c) Representar el área de la superficie comprendida entre la función y la recta $y = \frac{x}{2}$:



d) Calcular la función primitiva de la función $f(x)$ que tiene el valor 1 cuando $x = 0$:

✚ Calcularemos $F(x) = \int \frac{x}{x^2+1} dx$:

$$F(x) = \int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + K$$

✚ Entonces, como $F(0) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \ln 1 + K = 1 \Rightarrow K = 1$

Por lo tanto, $F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + 1$

B 3 Problema de cálculo de probabilidades.

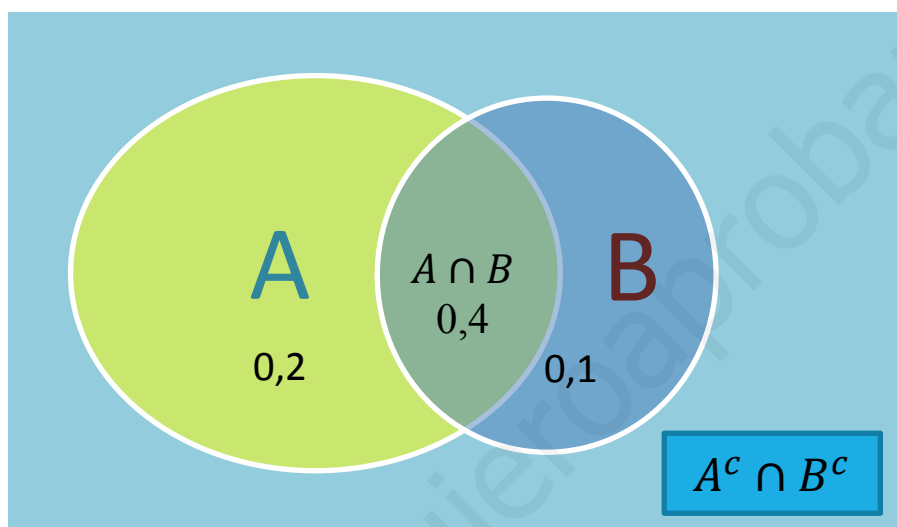
Sabemos $P(A) = 0,6$; $P(B) = 0,5$; $P(A \cap B) = 0,4$

a) Calcular: $P(A \cup B)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,6 + 0,5 - 0,4 = 0,7 \Rightarrow P(A \cup B) = 0,7$$

b) Calcular: $P(A^c \cap B^c)$

$$P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0,7 = 0,3 \Rightarrow P(A^c \cap B^c) = 0,3$$



c) Calcular: $P(A^c \cap B)$

$$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 0,5 - 0,4 = 0,1 \Rightarrow P(A^c \cap B) = 0,1$$

d) Calcular: $P(A|B)$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A|B) = \frac{0,4}{0,5} = 0,8 \Rightarrow P(A|B) = 0,8$$

OTRA MANERA: a través de una tabla de contingencia o de doble entrada.

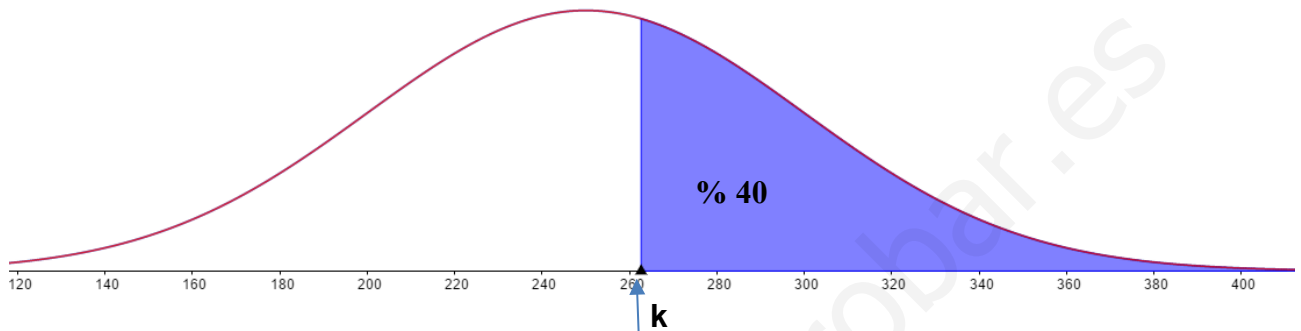
	B	B^c	
A	0,4	0,2	0,6
A^c	0,1	0,3	0,4
	0,5	0,5	1

B 4 Comprensión y uso de la distribución normal, y cálculo de probabilidades.

$X \equiv$ peso de las truchas $\sim N(250, 50)$

a) Peso mínimo para que la piscifactoría pueda vender el 40 % de las truchas.

✚ Tenemos que encontrar k tal que $P(X \geq k) = 0,4$



✚ Tipificación de la variable X : $Z = \frac{X-250}{50} \Rightarrow X = 50Z + 250$

$$\text{✚ } P(X \geq k) = P(50Z + 250 \geq k) = P\left(Z \geq \frac{k-250}{50}\right) = 0,4$$

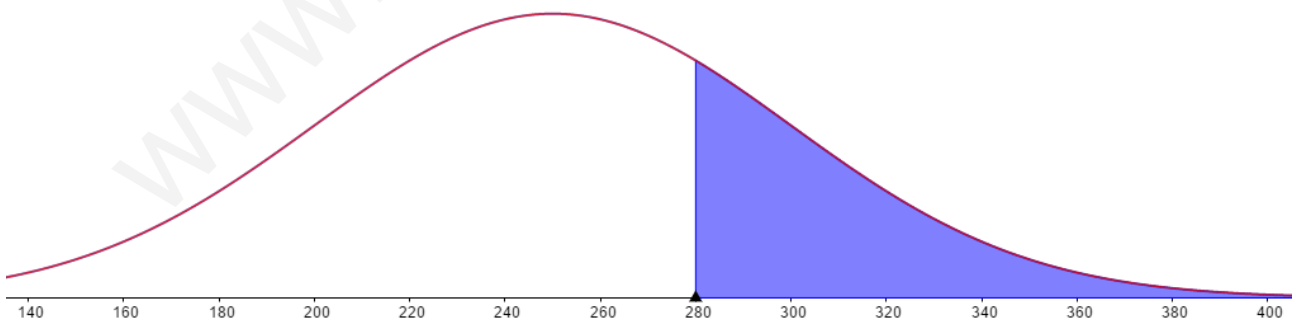
$$\Rightarrow 1 - P\left(Z < \frac{k-250}{50}\right) = 0,4 \Rightarrow P\left(Z < \frac{k-250}{50}\right) = 0,6$$

✚ Mirando en la tabla de la distribución normal, $\frac{k-250}{50} = 0,255 \Rightarrow k = 262,75$

✚ Por lo tanto, **el peso mínimo tiene que ser 262,75 gramos.**

✚

b) Calcular $P(X \geq 280)$, $N = 6000$



$$\begin{aligned} \text{✚ } P(X \geq 280) &= P(50Z + 250 \geq 280) = P\left(Z \geq \frac{280-250}{50}\right) = P(Z \geq 0,6) = \\ &= 1 - P(Z < 0,6) = 1 - 0,7257 = 0,2743 \Rightarrow \mathbf{27,43 \%} \end{aligned}$$

✚ El 27,43 % de 6000 $\Rightarrow 6000 \cdot 0,2743 = 1645,8$

Por lo tanto, en la piscifactoría se podrán poner a la venta aproximadamente **1646 truchas.**