M. A. S. Y MOV. ONDULATORIO FCA 05 ANDALUCÍA

1. Una partícula de 0,2 kg describe un movimiento armónico simple a lo largo del eje x, de frecuencia 20 Hz. En el instante inicial la partícula pasa por el origen, moviéndose hacia la derecha, y su velocidad es máxima. En otro instante de la oscilación la energía cinética es 0,2 J y la energía potencial es 0,6 J.
a) Escriba la ecuación de movimiento de la partícula y calcule su aceleración máxima.
b) Explique, con ayuda de una gráfica, los cambios de energía cinética y de energía potencial durante una oscilación.

2. La ecuación de una onda armónica en una cuerda tensa es:

$$y\ (x,t) = A\ \mathrm{sen}\ (\omega t - kx)$$

a) Indique el significado de las magnitudes que aparecen en dicha expresión.
b) Escriba la ecuación de otra onda que se propague en la misma cuerda en sentido opuesto, de amplitud mitad y frecuencia doble que la anterior.

3. La ecuación de una onda que se propaga por una cuerda tensa es:

$$y\ (x,t) = 0{,}05\ \mathrm{sen}\ \pi\ (25\ t - 2\ x)\ \text{(S.I.)}$$

a) Explique de qué tipo de onda se trata y en qué sentido se propaga e indique cuáles son su amplitud, frecuencia y longitud de onda.
b) Calcule la velocidad de propagación de la onda y la velocidad del punto x = 0 de la cuerda en el instante t = 1 s y explique el significado de cada una de ellas.

4. Una partícula describe un movimiento armónico simple de amplitud A y frecuencia f.
a) Represente en un gráfico la posición, la velocidad y la aceleración de la partícula en función del tiempo y comente sus características.
b) Explique cómo varían la amplitud, la frecuencia del movimiento y la energía mecánica de la partícula al duplicar el periodo de oscilación.

5. La ecuación de una onda en una cuerda es:

$$y\ (x,t) = 0{,}4\mathrm{sen}12\pi x\cos 40\pi t\quad \text{(S.I.)}$$

a) Explique las características de la onda y calcule su periodo, longitud de onda y velocidad de propagación.
b) Determine la distancia entre dos puntos consecutivos con amplitud cero.

1. - m = 0,2 kg f = 20 Hz

a) Si la oscilación comienza en la posición de equilibrio hacia elongaciones positivas, debe cumplirse que $x_0 = 0$ cuando t = 0. En este caso, la forma más sencilla de representar el movimiento es

$$x = A \cdot sen\,\omega t \qquad (1)$$

calculamos la frecuencia angular $\omega = 2 \cdot \pi \cdot f = 40\pi\, rad/s$

como conocemos la energía mecánica $E_M = E_C + E_P = 0,2\,J + 0,6\,J = 0,8\,J$

para calcular la amplitud, necesito conocer la constante elástica del resorte K

$$K = m \cdot \omega^2 = 0,2\,kg \cdot (40\pi\, rad/s)^2 = 3.158\,kg/s^2 = 3.158\,N/m$$

en la ecuación de la energía mecánica $E_M = \frac{1}{2}KA^2$ despejamos la amplitud

$$A = \sqrt{\frac{2 \cdot E_M}{K}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,8\,J}{3.158\,N/m}} = 0,0225\,m$$

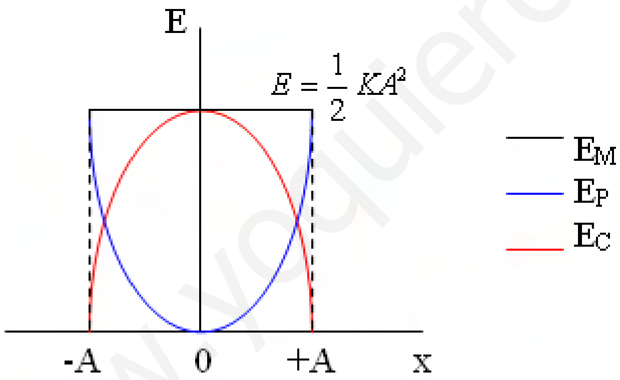
sustituyendo en (1), obtenemos la ecuación de movimiento de la partícula

$$x = 0,0225 \cdot sen\,40\pi t \quad m$$

para calcular la aceleración máxima

$$a_{\max} = \omega^2 \cdot A = (40\pi\, rad/s)^2 \cdot 0,0225\,m = 355,3\,m/s^2$$

b)



La energía cinética y la potencial varían de forma conjunta, mientras que la mecánica permanece constante.

La energía cinética es nula en los extremos de la trayectoria y máxima en el punto de equilibrio.

La energía potencial es máxima en los extremos de la trayectoria y nula en el punto de equilibrio.

2. - $$y(x,t) = A\,sen(\omega t - Kx)$$

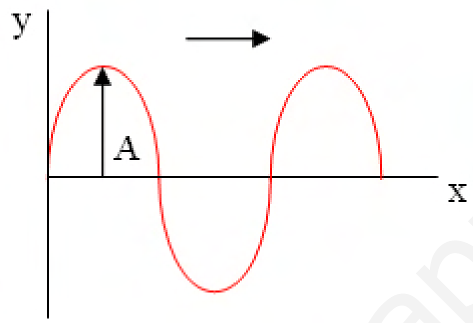
a) La perturbación que se propaga en forma de onda armónica, es producida por un oscilador armónico, por lo tanto:

y es la elongación, en el instante t, de un punto del medio que está a una distancia x (dirección de propagación) del origen (punto donde se inicia el movimiento ondulatorio).

A es la máxima elongación.

ω es la frecuencia angular del oscilador armónico que genera el movimiento ondulatorio.

K es el número de onda que se define como el número de longitudes de onda que hay en una distancia 2π.



b) $A' = \dfrac{A}{2}$ $\quad f' = 2f$ como $\omega = 2\pi f$ implica que $\omega' = 2\omega$

al desplazarse por la misma cuerda (suponemos que con la misma tensión T), lo hace con la misma velocidad de propagación $\left(v = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}} \right)$ ya que μ es la densidad lineal de la cuerda, así podemos calcular la relación entre las longitudes de onda

$$\lambda' = \frac{v}{f'} = \frac{v}{2f} = \frac{\lambda}{2}$$

y también entre los números de onda

$$K' = \frac{2\pi}{\lambda'} = \frac{2\pi}{\lambda/2} = 2\frac{2\pi}{\lambda} = 2K$$

la nueva ecuación es $y'(x,t) = A'sen(\omega' t + K' x)$ en la que ha cambiado el signo del ángulo porque lo ha hecho el sentido en el que se desplaza la onda.

Sustituyendo los nuevos parámetros por su relación con los anteriores

$$y'(x,t) = \frac{A}{2} sen\left(2\omega t + 2Kx\right)$$

3. - $y(x,t) = 0,05 \cdot sen\,\pi(25t - 2x)$ (S.I.)

a) La ecuación es del tipo $y(x,t) = A\,sen(\omega t - Kx)$ se trata de una onda armónica que se desplaza hacia la derecha.

Por comparación de las dos ecuaciones, podemos decir que la amplitud es A = 0,05m, la frecuencia angular es $\omega = 25\pi$ rad/s y que el número de onda es $K = 2\pi\ m^{-1}$, por lo tanto $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{25\pi\, s^{-1}}{2\pi} = 12,5\, s^{-1}$ y $\lambda = \dfrac{2\pi}{K} = \dfrac{2\pi}{2\pi\, m^{-1}} = 1m$

b) La velocidad de propagación es la velocidad constante con la que se desplaza la perturbación por el medio, en este caso, la cuerda. Se calcula mediante la expresión

$$v = \lambda \cdot f = 1m \cdot 12,5\, s^{-1} = 12,5\frac{m}{s}$$

Al desplazarse la onda por una cuerda, suponemos que es una onda transversal, por lo tanto la velocidad de vibración de un punto de la cuerda es perpendicular a la dirección de propagación y se calcula mediante la siguiente expresión

$$v = \frac{dy}{dt} = 0,05 \cdot 25\pi \cdot \cos(25\pi t - 2\pi x) = 3,93 \cdot \cos(25\pi t - 2\pi x)$$

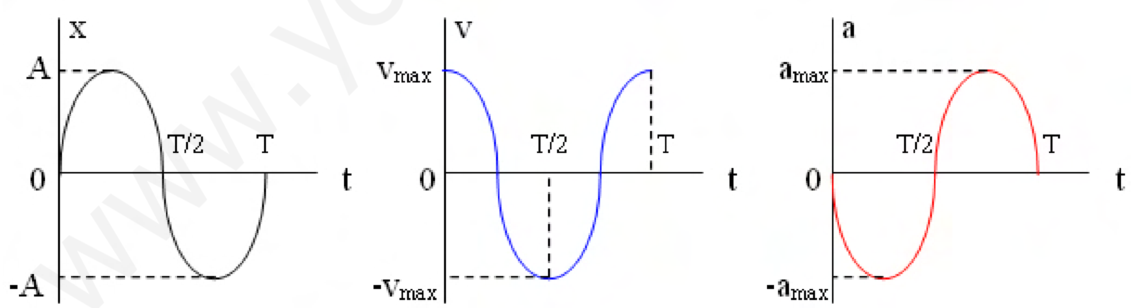
en el caso de que x = 0 y t = 1 s obtenemos

$$v = 3,93 \cdot \cos 25\pi = -3,93\frac{m}{s}$$

4. -

a) Suponiendo que en el instante inicial la partícula pasa por el origen, las ecuaciones que hay que representar son las siguientes:

$$x = A \cdot sen\,\omega t \qquad v = \frac{dx}{dt} = A \cdot \omega \cdot \cos\omega t \qquad a = \frac{dv}{dt} = -A \cdot \omega^2 \cdot sen\,\omega t$$



la velocidad es máxima en el punto de equilibrio y nula en los extremos y al aceleración es máxima en los extremos y nula en el centro.

4. -

b) Si T' = 2T la amplitud no cambia porque no depende del periodo A' = A

como $f' = \frac{1}{T'} = \frac{1}{2T} = \frac{f}{2}$ la frecuencia se reduce a la mitad

la frecuencia angular $\omega' = 2\pi f' = 2\pi \frac{f}{2} = \frac{\omega}{2}$ también se reduce a la mitad y por lo

tanto, cambia la constante elástica del resorte $K' = m \cdot \omega'^2 = m\left(\frac{\omega}{2}\right)^2 = \frac{m \cdot \omega^2}{4} = \frac{K}{4}$

sustituimos estos resultados en la ecuación de la energía mecánica

$$E_M' = \frac{1}{2} K' A'^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{K}{4} \cdot A^2 = \frac{E_M}{4}$$

que como vemos se ha reducido a la cuarta parte.

5. - $y(x,t) = 0,4 sen(12\pi x) \cdot \cos(40\pi t)$ (S.I.)

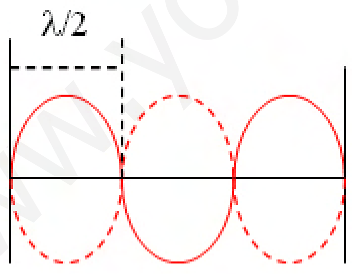
a) Es una onda estacionaria porque su ecuación es del tipo $y(x,t) = (2A sen\, Kx) \cos \omega t$
comparando ambas ecuaciones obtenemos:

$\omega = 40\pi\, rad/s$ como $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{40\pi\, rad/s} = 0,05\, s$

$K = 12\pi\, m^{-1}$ como $\lambda = \frac{2\pi}{K} = \frac{2\pi}{12\pi\, m^{-1}} = 0,166\, m$

no tiene velocidad de propagación porque una onda estacionaria no se propaga, la perturbación queda confinada entre los nodos.

b) Si representamos una cuerda atada por los dos extremos, en la que se forma una onda estacionaria



vemos que la distancia existente entre dos nodos es $x = \frac{\lambda}{2} = \frac{0,166\, m}{2} = 0,083\, m$