UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

LOMCE – JUNIO 2018

MATEMÁTICAS II

INDICACIONES AL ALUMNO

1. Debe escogerse una sola de las opciones.
2. Debe exponerse con claridad el planteamiento de la respuesta o el método utilizado para su resolución. Todas las respuestas deben ser razonadas.
3. Entre corchetes se indica la puntuación máxima de cada apartado.
4. **No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables. Tampoco está permitido el uso de dispositivos con acceso a Internet.**

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1

Sean *x, y, z* números reales. Consideremos las matrices

$$A=\begin{pmatrix} z & 2 & x \\ 1 & -y & -z \\ x+z & -y & z \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1) [2 PUNTOS] Escriba un sistema de ecuaciones en las incógnitas *x, y, z* que resuelvan el problema matricial $AB=C$ y calcule todas sus soluciones.

2) [1,25 PUNTOS] Si $x = 0$, $y = 0$, calcule para qué valores de *z* la matriz A tiene rango 2.

Ejercicio 2

Sea $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-7x+10}$.

1) [2.5 PUNTOS] Calcule todas las primitivas de *f(x)*.

2) [1 PUNTO] Calcule el área encerrada por la gráfica de *f(x)* y las rectas $y=0$, $x=3$ y $x=4$.

Ejercicio 3

Tomemos la recta $r:\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x-z=0 \end{cases}$ y el plano $\Pi: 3x-y=2$.

1) [1 PUNTO] Demuestre que *r* y Π son paralelos.

2) [1 PUNTO] Calcule una recta paralela a *r* contenida en Π .

3) [1 PUNTO] Calcule la distancia de *r* a Π.

4) [0,25 PUNTOS] ¿Cuál es el vector director de la recta $s:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+4}{2}$?

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

Ejercicio 1

Considere el sistema siguiente dependiente del parámetro $b \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 2 & b & 0 \\ -1 & 0 & b \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

1) [2 PUNTOS] Clasifique el tipo de sistema según el parámetro *b*.

2) [1,25 PUNTOS] Calcule todas las soluciones del sistema en el caso $b = -2$.

Ejercicio 2

Se quiere construir un cilindro de volumen 250 · π metros cúbicos y área mínima.

1) [0,5 PUNTOS] Exprese la altura *h* del cilindro en función del radio *r* de la base.

2) [0,5 PUNTOS] Calcule la función *a(r)* que expresa el área del cilindro en función del radio de la base.

3) [2,5 PUNTOS] Calcule el valor del radio y la altura que hacen el área mínima.

Datos: Volumen del cilindro: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$, *área del cilindro:* $A = 2\pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot h$

Ejercicio 3

Sean *r* y *s* las rectas

$$r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases} , t \in \mathbb{R}$$

$$s: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$$

1) [1,25 PUNTOS] Calcule la posición relativa de *r* y *s*.

2) [1,5 PUNTOS] Calcule la distancia entre *r* y *s*.

3) [0,5 PUNTOS] Calcule el plano perpendicular a *s* que pasa por (0, 1, 0).

SOLUCIONES

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 1

Ejercicio 1

Sean x, y, z números reales. Consideremos las matrices

$$A=\begin{pmatrix} z & 2 & x \\ 1 & -y & -z \\ x+z & -y & z \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1) [2 PUNTOS] Escriba un sistema de ecuaciones en las incógnitas x, y, z que resuelvan el problema matricial $AB=C$ y calcule todas sus soluciones.

2) [1,25 PUNTOS] Si $x = 0$, $y = 0$, calcule para qué valores de z la matriz A tiene rango 2.

1)

$$AB=C \Rightarrow \begin{pmatrix} z & 2 & x \\ 1 & -y & -z \\ x+z & -y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2z-2+x \\ 2+y-z \\ 2(x+z)+y+z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2z-2+x=-2 \\ 2+y-z=3 \\ 2(x+z)+y+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \quad +2z=0 \\ y-z=3-2 \\ 2x+2z+y+z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\left.\begin{array}{l} x \quad +2z=0 \\ y-z=1 \\ 2x+y+3z=1 \end{array}\right\}} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-2z \\ y-z=1 \\ 2x+y+3z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} y-z=1 \\ -4z+y+3z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y-z=1 \\ y-z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow y-z=1 \Rightarrow \boxed{y=1+z}$$

Las soluciones del sistema que surge de la ecuación matricial son

$x=-2t;\quad y=1+t;\quad z=t\quad siendo\ t\in\mathbb{R}$.

2) Si $x = 0$, $y = 0$ la matriz A queda

$$A=\begin{pmatrix} z & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -z \\ z & 0 & z \end{pmatrix}$$

Calculamos su determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} z & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -z \\ z & 0 & z \end{vmatrix} = -2z^2 - 2z$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -2z^2 - 2z = 0 \Rightarrow -2z(z+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ o \\ z = -1 \end{cases}$$

- Si $z \neq 0 \; y \; z \neq -1$ entonces el determinante de A no se anula y su rango es 3.

Veamos que ocurre si z toma el valor 0 o –1.

- Si z = 0 el determinante de A se anula y su rango no es 3.

  ¿El rango de A es 2?

  La matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Esta matriz tiene un menor de orden 2 con determinante no nulo, el que resulta de quitar la fila y columna 3ª → $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y su determinante vale $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. El rango de A es 2.

- Si z = –1 el determinante de A se anula y su rango no es 3.

  ¿El rango de A es 2?

  La matriz A queda $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Esta matriz tiene un menor de orden 2 con determinante no nulo, el que resulta de quitar la fila y columna 3ª → $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y su determinante vale $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. El rango de A es 2.

Resumiendo: El rango de la matriz A es 2 para z = 0 y z = –1.

Ejercicio 2

Sea $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-7x+10}$.

1) [2.5 PUNTOS] Calcule todas las primitivas de *f(x)*.

2) [1 PUNTO] Calcule el área encerrada por la gráfica de *f(x)* y las rectas $y=0$, $x=3$ y $x=4$.

1) Debemos calcular $\int f(x)dx=\int \dfrac{x-1}{x^2-7x+10}dx$.

Para ello utilizamos la descomposición en fracciones simples del integrando.

$$x^2-7x+10=0 \Rightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{(-7)^2-40}}{2}=\frac{7\pm 3}{2}=\begin{cases}\dfrac{7+3}{2}=5=x\\[2mm] \dfrac{7-3}{2}=2=x\end{cases}$$

$$\frac{x-1}{x^2-7x+10}=\frac{x-1}{(x-5)(x-2)}=\frac{A}{x-5}+\frac{B}{x-2}=\frac{A(x-2)+B(x-5)}{(x-5)(x-2)}$$

$$x-1=A(x-2)+B(x-5)\Rightarrow\begin{cases}Si\ x=2\to 2-1=0+B(2-5)\to 1=-3B\to B=-\dfrac{1}{3}\\[2mm] Si\ x=5\to 5-1=A(5-2)+0\to 4=3A\to A=\dfrac{4}{3}\end{cases}$$

$$\frac{x-1}{x^2-7x+10}=\frac{4/3}{x-5}-\frac{1/3}{x-2}$$

Sustituimos en la integral y resolvemos.

$$\int f(x)dx=\int\frac{x-1}{x^2-7x+10}dx=\int\frac{4/3}{x-5}-\frac{1/3}{x-2}dx=\int\frac{4/3}{x-5}dx-\int\frac{1/3}{x-2}dx=$$

$$=\frac{4}{3}\int\frac{1}{x-5}dx-\frac{1}{3}\int\frac{1}{x-2}dx=\boxed{\frac{4}{3}\ln|x-5|-\frac{1}{3}\ln|x-2|+K}$$

2) Hallamos los puntos de corte de la gráfica con el eje de abscisas.

$$f(x)=0\Rightarrow\frac{x-1}{x^2-7x+10}=0\Rightarrow x-1=0\Rightarrow x=1$$

Este valor *x = 1* no está entre 3 y 4 por lo que el área encerrada por la gráfica de *f(x)* y las rectas $y=0$, $x=3$ y $x=4$ se obtiene con una integral definida de la función entre 3 y 4.

Comprobamos si la función es positiva o negativa en este intervalo.

$$x = 3,5 \Rightarrow f(3,5) = \frac{3,5-1}{(3,5)^2 - 7 \cdot 3,5 + 10} = -1,111 < 0$$

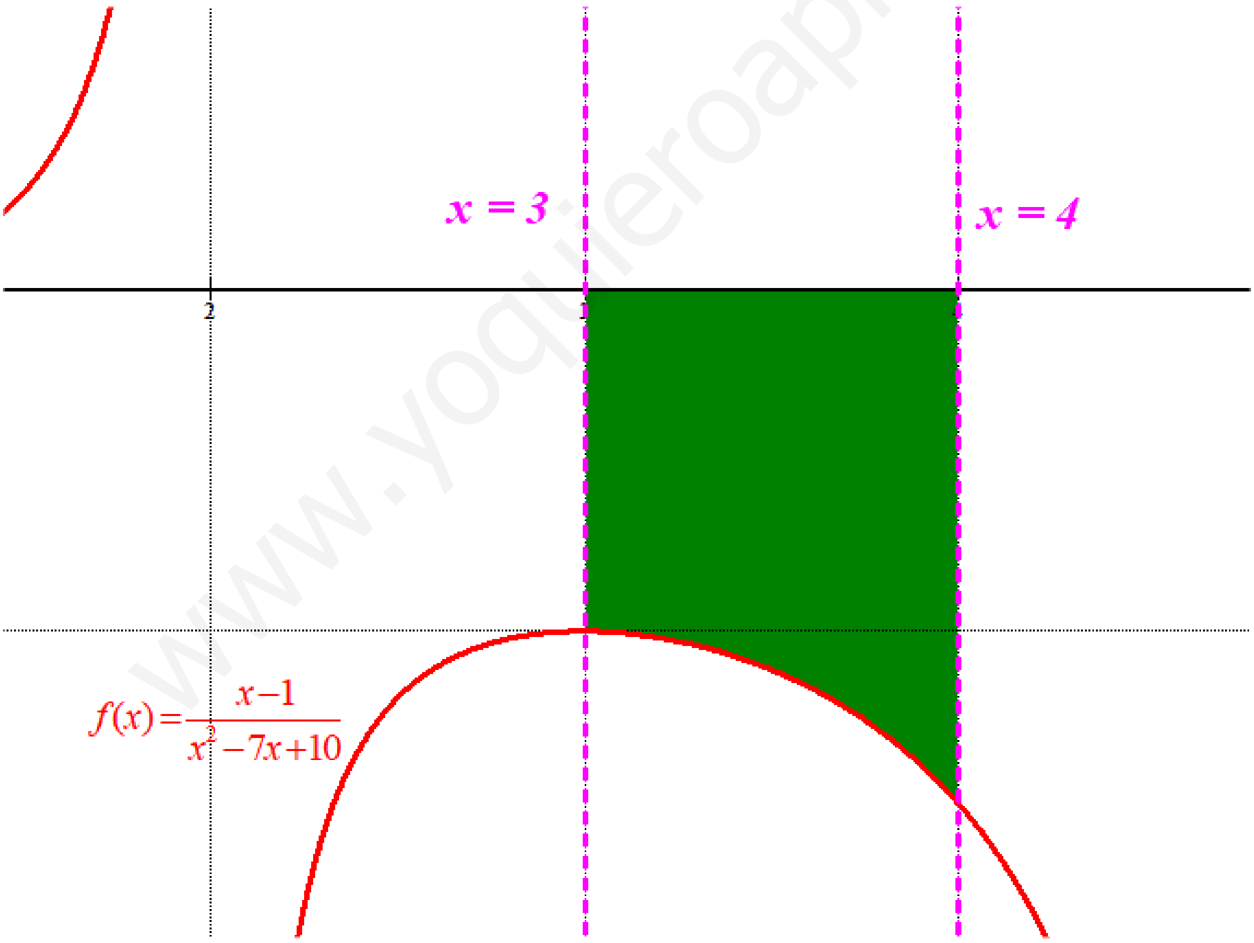
La función es negativa y el área es el valor absoluto de la integral definida.

$$\int_3^4 f(x)dx = \int_3^4 \frac{x-1}{x^2-7x+10}dx = \left[\frac{4}{3}\ln|x-5| - \frac{1}{3}\ln|x-2|\right]_3^4 =$$

$$= \left[\frac{4}{3}\ln|4-5| - \frac{1}{3}\ln|4-2|\right] - \left[\frac{4}{3}\ln|3-5| - \frac{1}{3}\ln|3-2|\right] =$$

$$= \frac{4}{3}\ln 1 - \frac{1}{3}\ln 2 - \frac{4}{3}\ln 2 + \frac{1}{3}\ln 1 = 0 - \frac{1}{3}\ln 2 - \frac{4}{3}\ln 2 + 0 = -\frac{5}{3}\ln 2$$

$$\boxed{\text{Área} = \left|-\frac{5}{3}\ln 2\right| = \frac{5}{3}\ln 2 = 1,15\, u^2}$$



Ejercicio 3

Tomemos la recta $r:\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x-z=0 \end{cases}$ y el plano $\Pi: 3x-y=2$.

1) [1 PUNTO] Demuestre que r y Π son paralelos.
2) [1 PUNTO] Calcule una recta paralela a r contenida en Π .
3) [1 PUNTO] Calcule la distancia de r a Π.
4) [0,25 PUNTOS] ¿Cuál es el vector director de la recta $s: \frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+4}{2}$?

1) Hallamos el vector director de la recta y el normal del plano.

$$r:\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x-z=0 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = (1,-1,1)\times(2,0,-1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = i+2j+2k+j = i+3j+2k$$

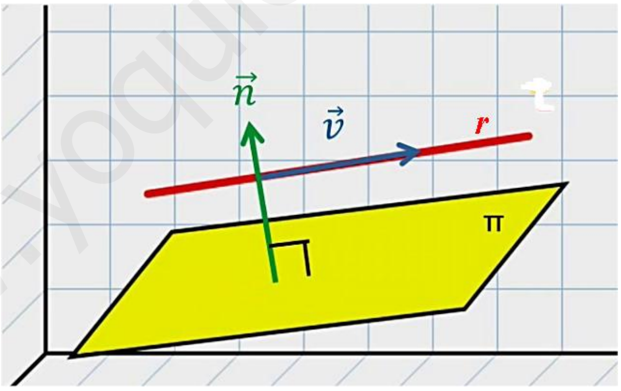
$$\overrightarrow{v_r} = (1,3,2)$$

$$\Pi: 3x-y=2 \Rightarrow \vec{n} = (3,-1,0)$$

Hacemos el producto escalar de ambos vectores y comprobamos si es cero o no.

$$\overrightarrow{v_r}\cdot\vec{n} = (1,3,2)(3,-1,0) = 3-3 = 0$$

Al ser cero el producto escalar estos vectores son perpendiculares y plano y recta son paralelos.



2) Hallamos un punto P cualquiera del plano $\Pi: 3x-y=2$. Tomamos *x = 0* y entonces *–y = 2* → *y = –2*. Como en la ecuación del plano no aparece la *z* entonces podemos darle cualquier valor. El punto es P(0, –2, 0).

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{v_r} = (1,3,2) \\ P(0,-2,0)\in s \end{array}\right\} \Rightarrow s: \frac{x}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{2}$$

3) Hallamos un punto cualquiera de la recta y hallamos la distancia del punto al plano que será lo mismo que la distancia de la recta al plano.

$$r:\left.\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x-z=0 \end{cases} \atop \text{Tomamos } \boxed{x=0} \right\} \Rightarrow \begin{cases} -y+z=1 \\ -z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y+z=1 \\ \boxed{z=0} \end{cases} \Rightarrow -y=1 \Rightarrow \boxed{y=-1} \Rightarrow P(0,-1,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} \Pi: 3x-y=2 \\ P(0,-1,0)\in r \end{array}\right\} \Rightarrow \text{distancia}(r,\Pi)=\text{distancia}(P,\Pi)=\frac{|0+1-2|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{10}}=\boxed{0,31\,u}$$

4) Las coordenadas del vector director son los valores de los denominadores:

$$s:\frac{x-2}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+4}{2} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{v_s}=(3,2,2)}$$

OPCIÓN DE EXAMEN Nº 2

Ejercicio 1

Considere el sistema siguiente dependiente del parámetro $b \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} 2 & b & 0 \\ -1 & 0 & b \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

1) [2 PUNTOS] Clasifique el tipo de sistema según el parámetro *b*.

2) [1,25 PUNTOS] Calcule todas las soluciones del sistema en el caso $b = -2$.

1) Este es un sistema de ecuaciones cuya clasificación depende del rango de la matriz de coeficientes A y del rango de la matriz ampliada A/B.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & b & 0 \\ -1 & 0 & b \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A/B = \begin{pmatrix} 2 & b & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como la matriz A/B es de dimensión 4x4 empezamos estudiando las posibilidades del valor del rango de esta matriz. Utilizamos Gauss y la transformamos en otra matriz equivalente en cuanto al valor del rango.

$$|A/B| = \begin{vmatrix} 2 & b & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^{a} - \text{Fila } 2^{a} \\ \begin{array}{cccc} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -b & -1 \\ \hline 0 & 0 & 2-b & 0 \end{array} \to \text{Nueva fila } 3^{a} \end{array} \right\} = \begin{vmatrix} 2 & b & 0 & 0 \\ -1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 2-b & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \{\text{Desarrollo por la columna } 4^{a}\} = (+1)\begin{vmatrix} 2 & b & 0 \\ 0 & 0 & 2-b \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - b(2-b) - 2(2-b) = (-b-2)(2-b)$$

$$|A/B| = 0 \Rightarrow (-b-2)(2-b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -b-2=0 \to b=-2 \\ 2-b=0 \to b=2 \end{cases}$$

Nos planteamos tres situaciones distintas que analizamos por separado.

CASO 1. $b \neq 2 \; y \; b \neq -2$

En este caso el determinante de la matriz ampliada A/B es distinto de cero y su rango es 4. Y sin embargo, el rango de la matriz A que es de dimensión 4x3 es como máximo 3. Los rangos son distintos y el sistema es incompatible.

CASO 2. $b = 2$

En este caso el determinante de la matriz ampliada A/B es cero y vemos cual puede ser su rango.

$$A/B=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Utilizamos Gauss para obtener su rango.

$$A/B=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ -1 \quad 0 \quad 2 \quad 1 \\ 1 \quad 0 \quad -2 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \to \text{Nueva fila } 3^a \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 1^a - 2\cdot\text{Fila } 3^a \\ 2 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \\ 2 \quad -2 \quad 0 \quad 0 \\ \hline 4 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \to \text{Nueva fila } 1^a \end{array}\right\} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \left\{\text{Cambio fila } 3^a \text{ por fila } 4^a\right\} \to \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \left\{\text{Cambio la fila } 3^a \text{ por fila } 2^a\right\} \to \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de A/B es 3 al igual que el rango de A pues A son las tres primeras columnas.

Como el número de incógnitas es 3.

El sistema es compatible determinado.

CASO 3. Si $b=-2$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad A/B=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Utilizamos Gauss para obtener su rango.

$$A/B=\begin{pmatrix}2&-2&0&0\\-1&0&-2&1\\-1&0&2&1\\-1&1&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Fila 3}^{\text{a}}-\text{Fila 2}^{\text{a}}\\ \begin{array}{cccc}-1&0&2&1\\1&0&2&-1\\\hline 0&0&4&0\end{array}\rightarrow\text{Nueva fila 3}^{\text{a}}\end{array}\right\}\rightarrow\begin{pmatrix}2&-2&0&0\\-1&0&-2&1\\0&0&4&0\\-1&1&0&0\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Fila 1}^{\text{a}}+2\cdot\text{Fila 2}^{\text{a}}\\ \begin{array}{cccc}2&-2&0&0\\-2&0&-4&2\\\hline 0&-2&-4&2\end{array}\rightarrow\text{Nueva fila 2}^{\text{a}}\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l}\text{Fila 1}^{\text{a}}+2\cdot\text{Fila 4}^{\text{a}}\\ \begin{array}{cccc}2&-2&0&0\\-2&2&0&0\\\hline 0&0&0&0\end{array}\rightarrow\text{Nueva fila 4}^{\text{a}}\end{array}\right\}\rightarrow\begin{pmatrix}2&-2&0&0\\0&-2&-4&2\\0&0&4&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

La matriz A/B tiene rango 3, al igual que la matriz A y el número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado.

2) Para $b=-2$ el sistema es compatible determinado (solución única) y queda:

$$\begin{pmatrix}2&-2&0\\-1&0&-2\\-1&0&2\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix}$$ que es equivalente (visto en el apartado anterior) a:

$$\begin{pmatrix}2&-2&0\\0&-2&-4\\0&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\2\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}2x-2y=0\\-2y-4z=2\\4z=0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}2x-2y=0\\-2y-4z=2\\\boxed{z=0}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}2x-2y=0\\-2y=2\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{r}2x-2y=0\\\boxed{y=-1}\end{array}\right\}\Rightarrow 2x+2=0\Rightarrow\boxed{x=-1}$$

La solución es $x=-1;\quad y=-1;\quad z=0$

Ejercicio 2

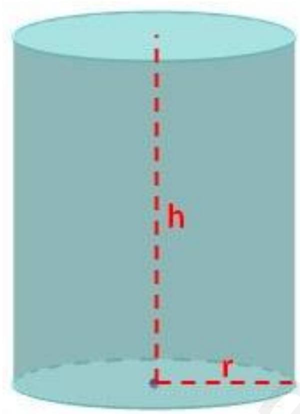
Se quiere construir un cilindro de volumen $250 \cdot \pi$ metros cúbicos y área mínima.

1) [0,5 PUNTOS] Exprese la altura *h* del cilindro en función del radio *r* de la base.

2) [0,5 PUNTOS] Calcule la función *a(r)* que expresa el área del cilindro en función del radio de la base.

3) [2,5 PUNTOS] Calcule el valor del radio y la altura que hacen el área mínima.

Datos: Volumen del cilindro: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$, *área del cilindro:* $A = 2\pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot h$



1) $V = \pi \cdot r^2 \cdot h \Rightarrow 250\pi = \pi r^2 h \Rightarrow 250 = r^2 h \Rightarrow h = \dfrac{250}{r^2}$

2)

$$\left.\begin{array}{l} h = \dfrac{250}{r^2} \\ a(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h \end{array}\right\} \Rightarrow a(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \frac{250}{r^2} = 2\pi r^2 + \frac{500\pi}{r}$$

3) Derivamos e igualamos a cero en busca de los puntos críticos de la función área.

$$a(r) = 2\pi r^2 + \frac{500\pi}{r} \Rightarrow a'(r) = 4\pi r - \frac{500\pi}{r^2}$$

$$a'(r) = 0 \Rightarrow 4\pi r - \frac{500\pi}{r^2} = 0 \Rightarrow \frac{500\pi}{r^2} = 4\pi r \Rightarrow 500\pi = 4\pi r^3 \Rightarrow 125 = r^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{125} = 5$$

Sustituimos en la derivada segunda y comprobamos el signo para el radio 5.

$$a'(r) = 4\pi r - \frac{500\pi}{r^2} \Rightarrow a''(r) = 4\pi + 2\frac{500\pi}{r^3}$$

$$a''(5) = 4\pi + 2\frac{500\pi}{5^3} > 0$$

El radio de 5 metros nos da un área máxima y el valor de la altura es

$$h = \frac{250}{r^2} = \frac{250}{5^2} = 10 \text{ metros}$$

Ejercicio 3

Sean *r* y *s* las rectas

$$r:\begin{cases} x=1 \\ y=2t \\ z=-2+3t \end{cases}, t\in\mathbb{R}$$

$$s:\frac{x-1}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-2}$$

1) [1,25 PUNTOS] Calcule la posición relativa de *r* y *s*.

2) [1,5 PUNTOS] Calcule la distancia entre *r* y *s*.

3) [0,5 PUNTOS] Calcule el plano perpendicular a *s* que pasa por (0, 1, 0).

1) Obtenemos los vectores directores y un punto de cada recta.

$$r:\begin{cases} x=1 \\ y=2t \\ z=-2+3t \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{matrix} P_r(1,0,-2) \\ \vec{v_r}=(0,2,3) \end{matrix}\right\}$$

$$s:\frac{x-1}{3}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-2} \Rightarrow \left.\begin{matrix} P_s(1,0,-1) \\ \vec{v_s}=(3,1,-2) \end{matrix}\right\}$$

Los vectores directores no son proporcionales $\frac{0}{3}\neq\frac{2}{1}\neq\frac{3}{-2}$, por lo que las rectas se cortan o cruzan.

Calculamos el producto mixto de los vectores $\vec{v_r}, \vec{v_s}$ y $\overrightarrow{P_rP_s}$ y comprobamos si es nulo o no.

$$\overrightarrow{P_rP_s}=(1,0,-1)-(1,0,-2)=(0,0,1)$$

$$\left[\vec{v_r}, \vec{v_s}, \overrightarrow{P_rP_s}\right]=\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-6\neq 0$$

Al ser distinto de cero los 3 vectores forman un paralelepípedo y las rectas se cruzan.

2) La distancia entre las rectas es el cociente del volumen del paralelepípedo anterior dividido entre el área de la base (módulo del producto vectorial de los vectores directores de ambas rectas).

$$\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -4i + 9j - 6k - 3i = -7i + 9j - 6k = (-7, 9, -6)$$

$$\left|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}\right| = \sqrt{(-7)^2 + 9^2 + (-6)^2} = \sqrt{166}$$

$$\text{Distancia}(r, s) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{P_rP_s}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}\right|} = \frac{|-6|}{\sqrt{166}} = \boxed{0,465\, u}$$

3) El plano perpendicular a *s* que pasa por (0, 1, 0) tiene como vector normal el vector director de s.

$$\left.\begin{array}{l} (0,1,0) \in \pi \\ \vec{n} = \overrightarrow{v_s} = (3,1,-2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (0,1,0) \in \pi \\ 3x + y - 2z + D = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 + 1 + 0 + D = 0 \Rightarrow D = -1$$

$$\boxed{\pi : 3x + y - 2z - 1 = 0}$$