EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)
FASE GENERAL
CURSO 2018–2019

MATERIA: MATEMÁTICAS II (3)

Convocatoria:

Instrucciones:
. Elija una de las opciones A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones el tribunal podrá anular su examen.
. En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Se califica todo.
. Se permite la utilización de calculadora científica, no programable ni con conexión a la red.

OPCIÓN A

1. Dada la función $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+7$
Calcular los valores de a, b y c sabiendo que se cumplen las condiciones siguientes:

- Dos de sus extremos relativos se encuentran en los puntos de abcisa $x = 0$ y $x = -2$
- La función corta el eje OX en el punto $x = 1$

Dar la expresión de la función resultante. (2,5 ptos)

2. Dado el sistema:
$$\left.\begin{array}{l} 2x+y+3z=2 \\ 5x+2y+4z=-1 \\ 3x+y+k^2z=3k \end{array}\right\}$$
a) Discutirlo para los distintos valores del parámetro k (1,5 ptos)
b) Resolverlo para $k = 2$ (1 pto)

3. Hallar la ecuación de la recta que verifica simultáneamente las siguientes condiciones:

- es paralela a los planos de ecuaciones: $\pi_1 \equiv x-3y+z=0$ y $\pi_2 \equiv 2x-y+3z=5$
- pasa por el punto $(2, -1, 5)$ (2,5 ptos)

4. En un supermercado se sabe que el 55% de los clientes traen su propia bolsa. El 30% de los que traen su propia bolsa son hombres y el 40% de los que no traen su propia bolsa son mujeres.
a) Construir el árbol de probabilidades descrito en el enunciado. (0,5 ptos)
b) ¿Qué proporción de clientes son mujeres? (1 pto)
c) Si un cliente elegido al azar es hombre, ¿qué probabilidad hay de que haya traído su propia bolsa? (1 pto)

Distrito Universitario de Canarias

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)

FASE GENERAL

CURSO 2018–2019

MATERIA: MATEMÁTICAS II	**(3)**
	Convocatoria:

Instrucciones:

. Elija una de las opciones A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones el tribunal podrá anular su examen.

. En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Se califica todo.

. Se permite la utilización de calculadora científica, no programable ni con conexión a la red.

OPCIÓN B

1. Dada la parábola de ecuación $y = 4 - x^2$ y la recta de ecuación $y = x + 2$

   a) Hallar los puntos intersección entre las curvas anteriores. (0,5 ptos)

   b) Esbozar el gráfico señalando el recinto limitado por ambas curvas. (0,5 ptos)

   c) Calcular el área del recinto limitado por ambas curvas. (1,5 ptos)

2. Sea la matriz $C = A \cdot B$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   a) Encontrar los valores de m para los que existe inversa de la matriz C (1,25 ptos)

   b) Calcular la matriz inversa de C en el caso de $m = 2$ (1,25 ptos)

3. Hallar el ángulo que forman el plano $\pi \equiv 2x - y + z = 0$ y el plano que contiene a las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{0} = z - 1 \quad \text{(2,5 ptos)}$$

4. Una compañía que fabrica ventiladores de CPU sabe que el tiempo de vida (en meses) de sus ventiladores se distribuye según una normal, de media igual a 18 meses y desviación típica 3,6 meses. Elegido un ventilador al azar:

   a) Calcular la probabilidad de que funcione como mucho 16 meses. (0,75 ptos)

   b) Calcular la probabilidad de que funcione al menos 1 año. (0,75 ptos)

   c) Calcular la probabilidad de que funcione entre 1 y 2 años. (1 pto)

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. Dada la función $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+7$

Calcular los valores de *a, b y c* sabiendo que se cumplen las condiciones siguientes:

- Dos de sus extremos relativos se encuentran en los puntos de abcisa *x* = 0 y *x* = –2
- La función corta el eje *OX* en el punto *x* = 1

Dar la expresión de la función resultante. (2,5 ptos)

Vemos las implicaciones de las condiciones establecidas:

- Si *x* = 0 y *x* = –2 son extremos relativos implica que la derivada en esos valores es cero.

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+7 \Rightarrow f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$

$f'(0)=0 \Rightarrow 4\cdot 0^3+3a\cdot 0^2+2b\cdot 0+c=0 \Rightarrow \boxed{c=0}$

$f'(-2)=0 \Rightarrow 4(-2)^3+3a(-2)^2+2b(-2)+c=0 \Rightarrow -32+12a-4b+0=0$

$12a-4b=32 \Rightarrow 3a-b=8 \Rightarrow \boxed{3a-8=b}$

- Si la función corta el eje *OX* en el punto *x* = 1 → *f(1) = 0.*

$f(1)=0 \Rightarrow 1^4+a\cdot 1^3+b\cdot 1^2+7=0 \Rightarrow 1+a+b+7=0 \Rightarrow \boxed{a+b=-8}$

Si unimos las dos condiciones últimas queda el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a+b=-8 \\ 3a-8=b \end{array}\right\} \Rightarrow a+3a-8=-8 \Rightarrow 4a=0 \Rightarrow \boxed{a=0} \Rightarrow 0+b=-8 \Rightarrow \boxed{b=-8}$$

Los valores pedidos son **a = 0, b = –8 y c = 0**. La función queda $\boxed{f(x)=x^4-8x^2+7}$

2. Dado el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y+3z=2 \\ 5x+2y+4z=-1 \\ 3x+y+k^2z=3k \end{array}\right\}$$

a) Discutirlo para los distintos valores del parámetro *k* (1,5 ptos)

b) Resolverlo para *k* = 2 (1 pto)

a) La matriz de los coeficientes es

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & k^2 \end{pmatrix} \text{ con determinante}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & k^2 \end{vmatrix}=4k^2+12+15-18-5k^2-8=-k^2+1$$

Los valores que anulan el determinante son $-k^2+1=0 \Rightarrow k^2=1 \Rightarrow k=1; k=-1$
Tenemos tres casos diferentes.

CASO 1. $k \neq 1; k \neq -1$

En este caso, el rango de la matriz de los coeficientes es 3 al igual que la matriz ampliada y el número de incógnitas. SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO. Tiene una única solución.

CASO 2. $k=1$

La matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & k^2 \end{pmatrix}$ tiene rango 2 ya que existe al menos un menor de orden 2 no nulo $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 4-5=-1 \neq 0$

La matriz ampliada $Am=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ tiene el menor de orden 3 formado por las tres últimas columnas no nulo $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 12-3+4-8-18+1=17-29=-12 \neq 0$. Por lo tanto el rango de Am es 3 distinto del rango de A. El sistema es INCOMPATIBLE. Sin solución

CASO 3. $k=-1$

La matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & k^2 \end{pmatrix}$ tiene rango 2 ya que existe al menos un menor de orden 2 no nulo $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 4-5=-1 \neq 0$

La matriz ampliada $Am=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 2 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ tiene el menor de orden 3 formado por las tres últimas columnas $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -12-3+4-8+18+1=23-23=0$

Por lo que el rango de la ampliada no es 3 y por tanto es 2 como el de la matriz de los coeficientes y menor que el número de incógnitas (3). El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO. Tiene infinitas soluciones.

b) Para k = 2 el sistema queda

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y+3z=2 \\ 5x+2y+4z=-1 \\ 3x+y+4z=6 \end{array}\right\}$$

El determinante de la matriz de los coeficientes vale

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -4+1=-3$ que hemos visto que es compatible determinado. Aplicando la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \\ 6 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{16+24-3-36+4-8}{-3} = \frac{-3}{-3} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 4 \\ 3 & 6 & 4 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-8+24+90+9-40-48}{-3} = \frac{27}{-3} = -9$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{24-3+10-12-30+2}{-3} = \frac{-9}{-3} = 3$$

La solución es x = 1; y = –9; z = 3

3. Hallar la ecuación de la recta que verifica simultáneamente las siguientes condiciones:

- es paralela a los planos de ecuaciones: $\pi_1 \equiv x-3y+z=0$ y $\pi_2 \equiv 2x-y+3z=5$
- pasa por el punto (2, –1, 5) (2,5 ptos)

Si es paralela a los planos entonces es perpendicular a los vectores normales de ambos y por tanto el producto vectorial de estos vectores normales nos sirve como vector director de la recta.

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1 \equiv x-3y+z=0 \Rightarrow \overrightarrow{n_1}=(1,-3,1) \\ \pi_2 \equiv 2x-y+3z=5 \Rightarrow \overrightarrow{n_2}=(2,-1,3) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{n_1} \times \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= -9i+2j-k+6k-3j+i = -8i-j+5k$$

$$\overrightarrow{v_r} = (-8,-1,5)$$

Por lo que la ecuación de la recta pedida es

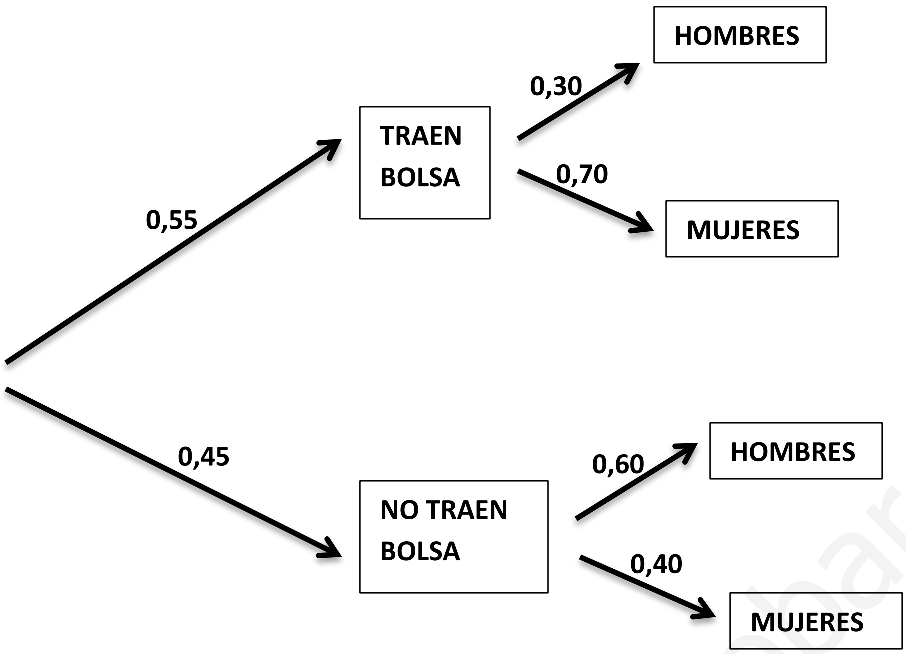
$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_r} = (-8,-1,5) \\ \text{Pasa por } P(2,-1,5) \end{array}\right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 2-8t \\ y = -1-t \\ z = 5+5t \end{cases}$$

4. En un supermercado se sabe que el 55% de los clientes traen su propia bolsa. El 30% de los que traen su propia bolsa son hombres y el 40% de los que no traen su propia bolsa son mujeres.

a) Construir el árbol de probabilidades descrito en el enunciado. (0,5 ptos)

b) ¿Qué proporción de clientes son mujeres? (1 pto)

c) Si un cliente elegido al azar es hombre, ¿qué probabilidad hay de que haya traído su propia bolsa? (1 pto) a)



b) P(Ser mujer) = P(traer bolsa) · P(traer bolsa y ser mujer) + P(no traer bolsa) · P(no traer bolsa y ser mujer) = 0,55 · 0,7 + 0,45 · 0,4 = 0,565

El 56,5% de los clientes que entran al supermercado son mujeres.

c)

$$P\left(\text{siendo hombre, que haya traido su bolsa}\right)=P\left(\text{Haya traido su bolsa / Es hombre}\right)=$$

$$=\frac{P\left(\text{Haya traido su bolsa }\cap\text{ Es hombre}\right)}{P\left(\text{Es hombre}\right)}=\frac{0,55\cdot 0,3}{1-0,565}=\frac{0,165}{0,435}=\boxed{0,379}$$

OPCIÓN B

1. Dada la parábola de ecuación $y = 4 - x^2$ y la recta de ecuación $y = x + 2$
   a) Hallar los puntos intersección entre las curvas anteriores. (0,5 ptos)
   b) Esbozar el gráfico señalando el recinto limitado por ambas curvas. (0,5 ptos)
   c) Calcular el área del recinto limitado por ambas curvas. (1,5 ptos)

a) Resolvamos el sistema formado por las dos ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} y = 4 - x^2 \\ y = x + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow 4 - x^2 = x + 2 \Rightarrow 0 = x^2 + x - 2$$

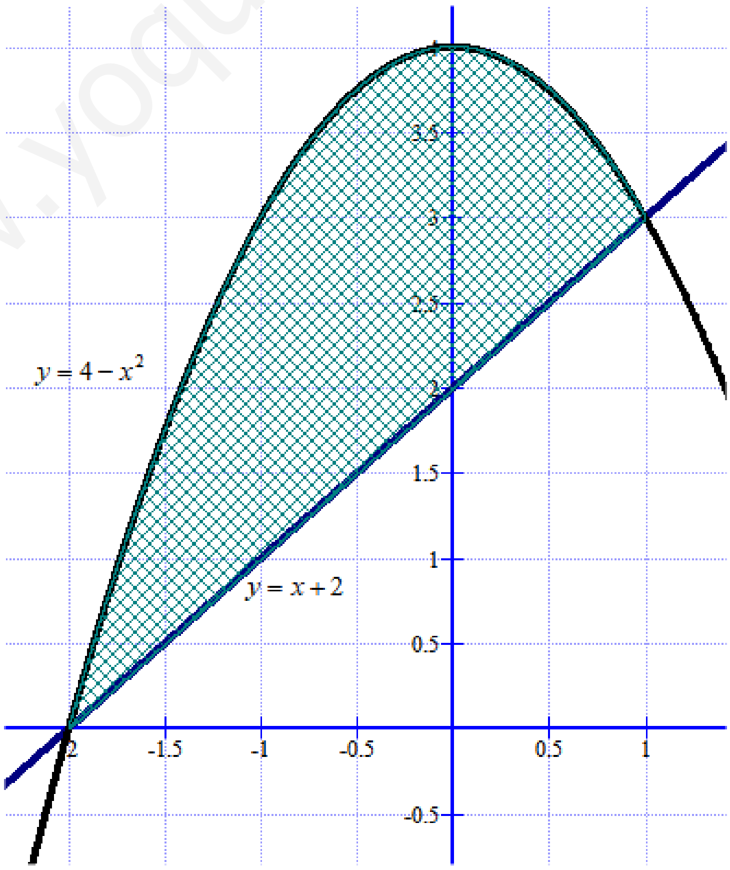
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x = \frac{-1+3}{2} = 1 \\ x = \frac{-1-3}{2} = -2 \end{cases}$$

Se cortan en los puntos de coordenadas P(1,3) y Q(–2,0).

b) Realizamos una tabla de valores para cada función y las dibujamos.

x	$y = 4 - x^2$
–3	–5
–2	0
–1	3
0	4
1	3

x	$y = x + 2$
–2	0
0	2



c)

$$Área=\int_{-2}^{1}4-x^2-(x+2)\,dx=\int_{-2}^{1}-x^2-x+2dx=\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-2}^{1}=$$

$$=\left[-\frac{1^3}{3}-\frac{1^2}{2}+2\cdot 1\right]-\left[-\frac{(-2)^3}{3}-\frac{(-2)^2}{2}+2(-2)\right]=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2-\frac{8}{3}+2+4=-3-\frac{1}{2}+8=\boxed{\frac{9}{2}u^2}$$

2. Sea la matriz $C=A\cdot B$, donde:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & m\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ m & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

a) Encontrar los valores de m para los que existe inversa de la matriz C (1,25 ptos)
b) Calcular la matriz inversa de C en el caso de $m=2$ (1,25 ptos)

a) $C=A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2 & m\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ m & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2m & 2+2m\\ 1-m & 0\end{pmatrix}$

$$|C|=\begin{vmatrix}1+2m & 2+2m\\ 1-m & 0\end{vmatrix}=(1-m)(2+2m)$$

Para que la matriz C tenga inversa su determinante debe ser no nulo.

$$|C|=0\Rightarrow(1-m)(2+2m)=0\Rightarrow\begin{cases}1-m=0\Rightarrow m=1\\ 2+2m=0\Rightarrow 2m=-2\Rightarrow m=-1\end{cases}$$

La matriz C tiene inversa para cualquier valor de m distinto de 1 y –1.

b) Si m = 2 entonces existe la inversa de C pues $|C|=\begin{vmatrix}5 & 6\\ -1 & 0\end{vmatrix}=6\neq 0$

Su inversa se calcula con la fórmula:

$$C^{-1}=\frac{Adj(C^t)}{|C|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}5 & -1\\ 6 & 0\end{pmatrix}}{6}=\frac{\begin{pmatrix}0 & -6\\ 1 & 5\end{pmatrix}}{6}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1/6 & 5/6\end{pmatrix}$$

3. Hallar el ángulo que forman el plano $\pi\equiv 2x-y+z=0$ y el plano que contiene a las rectas

$$r\equiv\begin{cases}x=1-t\\ y=t\\ z=t\end{cases} \text{ y } s\equiv\frac{x+1}{-2}=\frac{y}{0}=z-1 \quad \text{(2,5 ptos)}$$

Para determinar el ángulo formado por los dos planos necesitamos el vector normal del plano $\pi\equiv 2x-y+z=0$ que es $\vec{n}=(2,-1,1)$ y el vector normal del otro plano, para lo cual necesitamos su ecuación.

$$\left.\begin{array}{l} r\equiv\begin{cases}x=1-t\\ y=t\\ z=t\end{cases}\Rightarrow\vec{v_r}=(-1,1,1);P_r(1,0,0)\\ s\equiv\frac{x+1}{-2}=\frac{y}{0}=z-1\Rightarrow\vec{v_s}=(-2,0,1);\ P_s(-1,0,1)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

Evidentemente los vectores directores no son proporcionales $\left(\frac{-1}{-2} \neq \frac{1}{0} \neq \frac{1}{1}\right)$ y las rectas no son ni paralelas ni coincidentes.

El determinante de los vectores $\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}$ y $\overrightarrow{P_sP_r}$ nos indicará la posición relativa de las rectas.

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1+1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2+2 = 0$$

Las rectas son secantes y la ecuación del plano que definen lo hallamos a partir de los vectores directores y un punto cualquiera de una de las rectas:

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = 1-t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = (-1,1,1) \\ s \equiv \dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y}{0} = z-1 \Rightarrow \overrightarrow{v_s} = (-2,0,1);\ P_s(-1,0,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} x+1 & y & z-1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x+1-2y+2z-2+y = 0 \Rightarrow \pi' \equiv x-y+2z-1 = 0$$

Dada esta ecuación del segundo plano, tenemos su vector normal:

$$\overrightarrow{n'} = (1,-1,2)$$

Calculemos el ángulo entre los vectores normales usando el producto escalar.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n} \cdot \overrightarrow{n'} = (2,-1,1)\cdot(1,-1,2) = 2+1+2 = 5 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{n'} = |\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{n'}| \cdot \cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{n'}\right) = \sqrt{4+1+1}\sqrt{1+1+4}\cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{n'}\right) \end{array}\right\} \Rightarrow 5 = \sqrt{6}\sqrt{6}\cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{n'}\right)$$

$$5 = 6\cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{n'}\right) \Rightarrow \cos\left(\vec{n}, \overrightarrow{n'}\right) = \frac{5}{6} \Rightarrow \left(\vec{n}, \overrightarrow{n'}\right) = 33,5^{\circ}$$

El ángulo que forman los planos es de 33,5º

4. Una compañía que fabrica ventiladores de CPU sabe que el tiempo de vida (en meses) de sus ventiladores se distribuye según una normal, de media igual a 18 meses y desviación típica 3,6 meses. Elegido un ventilador al azar:
   a) Calcular la probabilidad de que funcione como mucho 16 meses. (0,75 ptos)
   b) Calcular la probabilidad de que funcione al menos 1 año. (0,75 ptos)
   c) Calcular la probabilidad de que funcione entre 1 y 2 años. (1 pto)

X= Tiempo de vida en meses de un ventilador de CPU
X = N(18, 3,6)

a)

$$P(X<16) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{X-18}{3,6} < \frac{16-18}{3,6}\right) =$$

$$= P(Z < -0,56) = 1 - P(Z < 0,56) = 1 - 0,7123 = \boxed{0,2877}$$

b)

$$P(X > 12) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{X-18}{3,6} > \frac{12-18}{3,6}\right) =$$

$$= P(Z > -1,67) = P(Z < 1,67) = \boxed{0,9525}$$

c)

$$P(12 < X < 24) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{12-18}{3,6} < \frac{X-18}{3,6} < \frac{24-18}{3,6}\right) =$$

$$= P(-1,66 < Z < 1,66) = P(Z < 1,66) - P(Z < -1,66) =$$

$$= P(Z < 1,66) - (1 - P(Z < 1,66)) =$$

$$= 0,9515 - (1 - 0,9515) = \boxed{0,903}$$