EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)
FASE GENERAL
CURSO 2016–2017

MATERIA: MATEMÁTICAS II

Convocatoria: Julio

. Elija una de las opciones A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones el tribunal podrá anular su examen.
. En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Se califica todo.

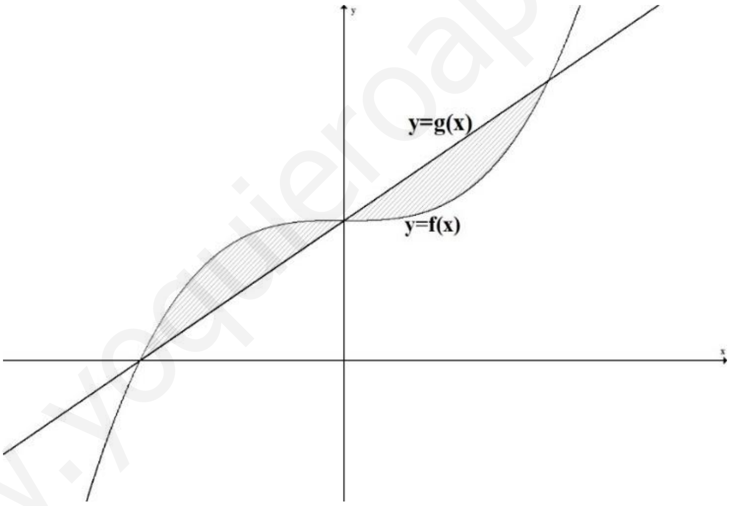
OPCIÓN A

1. Determinar los valores de a y b para que la función f definida de la forma

$$f(x)=\begin{cases} x^2+4x+a & si \quad x\le 2 \\ -x^2+bx & si \quad x>2 \end{cases}$$

Sea derivable en todo $x\in\mathbb{R}$ (2,5 ptos)

2. Calcular el área de la región sombreada en la siguiente figura, siendo las ecuaciones de las funciones que aparecen en la gráfica $f(x)=x^3+1$ y $g(x)=x+1$ (2,5 ptos)



3. Sea M la matriz $M=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones matriciales

$$\left.\begin{aligned} 2X+3Y&=M \\ 3X-2Y&=M^{-1} \end{aligned}\right\}$$

(2,5 puntos)

4. Dado el plano $\pi: 2x+y-z=0$ y la recta $r:\begin{cases} x-y+z=3 \\ 2x+y=1 \end{cases}$ se pide

a) Escribir la ecuación de la recta r en forma continua (1,25 puntos)
b) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto P(1,2,1), es paralelo a la recta r y perpendicular al plano π. (1,25 puntos)

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)
FASE GENERAL
CURSO 2016–2017

Distrito Universitario de Canarias

MATERIA: MATEMÁTICAS II	**(2)**
	Convocatoria: Julio

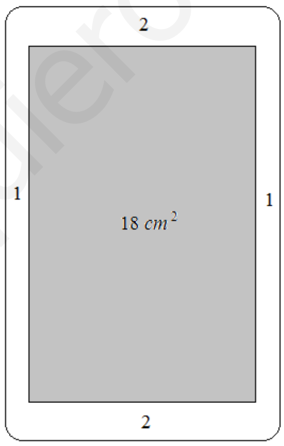
Instrucciones:
. Elija una de las opciones A o B, y conteste a las cuatro cuestiones que componen la opción elegida. Si mezcla preguntas de las dos opciones el tribunal podrá anular su examen.
. En el desarrollo de cada problema, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarlo. Se califica todo.

OPCIÓN B

1. Calcular los siguientes límites

   a) $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2\cos x}{sen\left(x^2\right)}$ (1,25 puntos) b) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2-\dfrac{x}{4}}{x^2}$ (1,25 puntos)

2. Se quiere fabricar un smartphone con una pantalla LCD de 18 cm^2. Los bordes superior e inferior han de tener 2 cm cada uno y los bordes laterales 1 cm. Calcular las dimensiones del teléfono para que la superficie del mismo sea mínima. (2,5 puntos)



3. Hallar la matriz X que cumple la ecuación matricial $A^{-1}XA=B$ siendo $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ (2,5 puntos)

4. Dados la recta $r: x=y+1=\dfrac{z-\dfrac{11}{m}}{\dfrac{-3}{m}}$ y el plano $\pi: 2x+y+z=9$ se pide

   a) Calcular el valor del parámetro m para que la recta r sea paralela al plano π (1,25 puntos)
   b) Para m = 2, determinar el punto de intersección de la recta r y el plano π (1,25 puntos)

SOLUCIONES

OPCIÓN A

1. Determinar los valores de a y b para que la función *f* definida de la forma

$$f(x)=\begin{cases} x^2+4x+a & si \quad x\le 2 \\ -x^2+bx & si \quad x>2 \end{cases}$$

Sea derivable en todo $x\in\mathbb{R}$ (2,5 ptos)

Para ser derivable primero debe ser continua y para ello debe serlo en x = 2 y debe cumplirse:

- Existe $f(2)=4+8+a=12+a$.
- Existe $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} x^2+4x+a=4+8+a=12+a$
- Existe $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} -x^2+bx=-4+2b$
- Los tres valores deben ser iguales. $12+a=-4+2b\Rightarrow a=-16+2b$

Para ser derivable, debe serlo en x = 2 y para ello deben coincidir las derivadas laterales en x = 2.

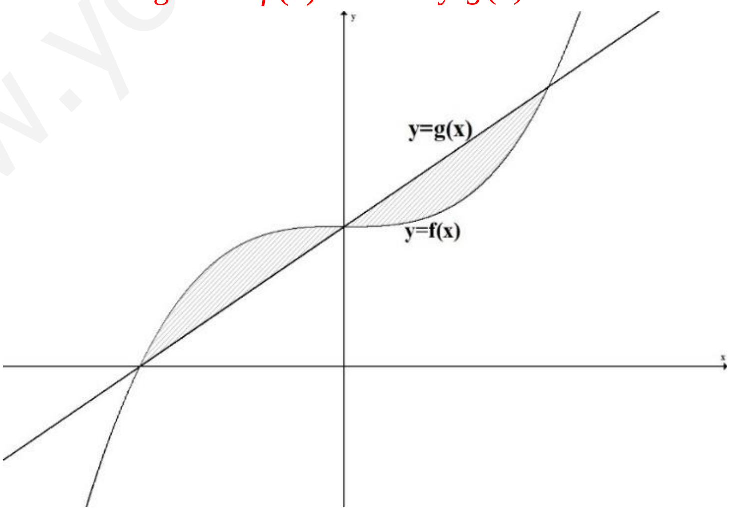
$$f(x)=\begin{cases} x^2+4x+a & si \quad x\le 2 \\ -x^2+bx & si \quad x>2 \end{cases} \Rightarrow f'(x)=\begin{cases} 2x+4 & si \quad x<2 \\ -2x+b & si \quad x>2 \end{cases}$$

Debe cumplirse $\left.\begin{array}{l} f'(2^-)=4+4=8 \\ f'(2^+)=-4+b \end{array}\right\}\Rightarrow 8=-4+b\Rightarrow \boxed{b=12}$

Sustituyendo $a=-16+2\cdot 12=24-16=8$

Los valores pedidos son $a=8$ y $b=12$.

2. Calcular el área de la región sombreada en la siguiente figura, siendo las ecuaciones de las funciones que aparecen en la gráfica $f(x)=x^3+1$ y $g(x)=x+1$ (2,5 ptos)



Veamos donde se cortan las funciones.

$$f(x)=g(x)\Rightarrow x^3+1=x+1\Rightarrow x^3-x=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\left(x^2-1\right)=0\Rightarrow\begin{cases} x=0 \\ x^2-1=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow\begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases} \end{cases}$$

El área de la región pedida se divide en dos integrales definidas ya que se cruzan las funciones en los puntos $x=-1$, $x=0$ y $x=1$.
Calculemos el valor de las integrales definidas.

$$\int_{-1}^{0} x^3+1-(x+1)\,dx=\int_{-1}^{0} x^3+1-x-1dx=\int_{-1}^{0} x^3-xdx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}=$$

$$=\left[\frac{0^4}{4}-\frac{0^2}{2}\right]-\left[\frac{1^4}{4}-\frac{1^2}{2}\right]=-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

$$\int_{0}^{1} x+1-(x^3+1)\,dx=\int_{0}^{1} x+1-x^3-1dx=\int_{0}^{1} x-x^3dx=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1}=$$

$$=\left[\frac{1^2}{2}-\frac{1^4}{4}\right]-\left[\frac{0^2}{2}-\frac{0^4}{4}\right]=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

El área pedida es $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\boxed{\frac{1}{2}u^2}$

3. Sea M la matriz $M=\begin{pmatrix}0&1\\1&7\end{pmatrix}$. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones matriciales

$$\left.\begin{array}{l}2X+3Y=M\\3X-2Y=M^{-1}\end{array}\right\}$$

(2,5 puntos)

$$\left.\begin{array}{l}2X+3Y=M\\3X-2Y=M^{-1}\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{cccc}\multicolumn{4}{l}{2\cdot\text{Ecuación }2^{\text{a}}\text{ - }3\cdot\text{Ecuación }1^{\text{a}}}\\6X&-4Y&=&2M^{-1}\\-6X&-9Y&=&-3M\\\hline&-13Y&=&2M^{-1}-3M\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}2X+3Y=M\\-13Y=2M^{-1}-3M\end{array}\right\}$$

Para poder proseguir necesitamos calcular la inversa de M.

$$|M|=\begin{vmatrix}0&1\\1&7\end{vmatrix}=-1\neq 0$$

$$M^{-1}=\frac{Adj(M^t)}{|M|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}0&1\\1&7\end{pmatrix}}{-1}=\frac{\begin{pmatrix}7&-1\\-1&0\end{pmatrix}}{-1}=\begin{pmatrix}-7&1\\1&0\end{pmatrix}$$

Seguimos con el sistema

$$\left.\begin{array}{r}2X+3Y=M\\-13Y=2M^{-1}-3M\end{array}\right\}\Rightarrow -13Y=2\begin{pmatrix}-7&1\\1&0\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}0&1\\1&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-14&2-3\\2-3&-21\end{pmatrix}$$

$$-13Y=\begin{pmatrix}-14&-1\\-1&-21\end{pmatrix}\Rightarrow\boxed{Y=\frac{1}{13}\begin{pmatrix}14&1\\1&21\end{pmatrix}}$$

$$2X+3Y=M\Rightarrow 2X+\frac{3}{13}\begin{pmatrix}14&1\\1&21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&7\end{pmatrix}$$

$$2X=\begin{pmatrix}0&1\\1&7\end{pmatrix}-\frac{3}{13}\begin{pmatrix}14&1\\1&21\end{pmatrix}$$

$$2X=\begin{pmatrix}-\frac{42}{13} & 1-\frac{3}{13}\\ 1-\frac{3}{13} & 7-\frac{63}{13}\end{pmatrix}\Rightarrow 2X=\begin{pmatrix}-\frac{42}{13} & \frac{10}{13}\\ \frac{10}{13} & \frac{28}{13}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}-\frac{21}{13} & \frac{5}{13}\\ \frac{5}{13} & \frac{14}{13}\end{pmatrix}}$$

La solución es $X=\frac{1}{13}\begin{pmatrix}-21 & 5\\ 5 & 14\end{pmatrix};\ Y=\frac{1}{13}\begin{pmatrix}14 & 1\\ 1 & 21\end{pmatrix}$

4. Dado el plano $\pi: 2x+y-z=0$ y la recta $r:\begin{cases}x-y+z=3\\ 2x+y=1\end{cases}$ se pide

a) Escribir la ecuación de la recta r en forma continua (1,25 puntos)
b) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto P(1,2,1), es paralelo a la recta r y perpendicular al plano π. (1,25 puntos)

a)

De la recta $r:\begin{cases}x-y+z=3\\ 2x+y=1\end{cases}$ podemos obtener dos puntos de la misma.

$$r:\begin{cases}x-y+z=3\\ 2x+y=1\end{cases}\Rightarrow r:\begin{cases}z=3+y-x\\ y=1-2x\end{cases}$$

Si tomamos $x=0\Rightarrow\begin{cases}z=3+y\\ y=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=3+1=4\\ y=1\end{cases}$ El punto es $A(0,1,4)$

Si tomamos $x=1\Rightarrow\begin{cases}z=2+y\\ y=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}z=2-1=1\\ y=-1\end{cases}$ El punto es $B(1,-1,1)$

De aquí obtenemos el vector director de la recta $\vec{v}=\overrightarrow{AB}=(1,-1,1)-(0,1,4)=(1,-2,-3)$

La ecuación es $\left.\begin{array}{l}\vec{v}=(1,-2,-3)\\ \text{Pasa por } A(0,1,4)\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{r:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-4}{-3}}$

b) El plano pedido es paralelo a r, luego tiene como vector director el de la recta r $\vec{v}=(1,-2,-3)$ y al ser perpendicular al plano $\pi: 2x+y-z=0$ también tiene como vector director el normal del plano $\vec{u}=\vec{n}=(2,1,-1)$. Y pasa por el punto P(1,2,1).

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}=(1,-2,-3)\\ \vec{u}=(2,1,-1)\\ \text{Pasa por } P(1,2,1)\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{vmatrix}x-1 & y-2 & z-1\\ 1 & -2 & -3\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x-2-6y+12+z-1+4z-4+y-2+3x-3=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x-5y+5z=0\Rightarrow\boxed{\pi'\equiv x-y+z=0}$$

OPCIÓN B

1. Calcular los siguientes límites

a) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2\cos x}{sen\left(x^2\right)}$ (1,25 puntos) b) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2-\frac{x}{4}}{x^2}$ (1,25 puntos)

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2\cos x}{sen\left(x^2\right)}=\frac{1+1-2}{0}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación (aplicamos L´Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}+2senx}{\cos\left(x^2\right)\cdot 2x}=\frac{1-1+0}{0}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación (aplicamos L´Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}+2\cos x}{-sen\left(x^2\right)\cdot 2x\cdot 2x+\cos\left(x^2\right)\cdot 2}=\frac{1+1+2}{0+2}=\frac{4}{2}=\boxed{2}$$

b)

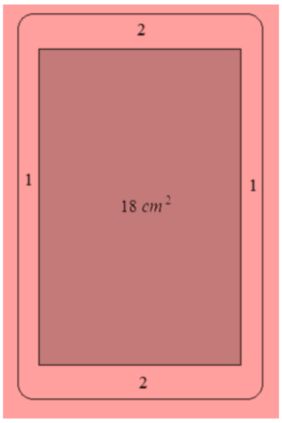
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2-\frac{x}{4}}{x^2}=\frac{\sqrt{4}-2}{0}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación (aplicamos L´Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{4+x}}-\frac{1}{4}}{2x}=\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}{0}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación (aplicamos L´Hôpital)}=$$

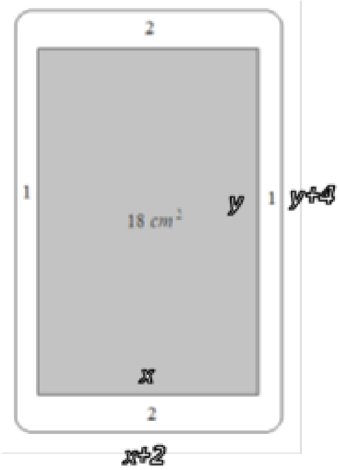
$$\left\{\text{La derivada de }\frac{1}{2\sqrt{4+x}}=\frac{1}{2}(4+x)^{-\frac{1}{2}}\text{ es }\frac{1}{2}\cdot\frac{-3}{2}(4+x)^{-\frac{1}{2}-1}=\frac{-3}{4}(4+x)^{-\frac{3}{2}}=\frac{-3}{4\sqrt{(4+x)^3}}\right\}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-3}{4\sqrt{(4+x)^3}}}{2}=\frac{\frac{-3}{4\sqrt{(4)^3}}}{2}=\boxed{\frac{-3}{64}}$$

2. Se quiere fabricar un smartphone con una pantalla LCD de 18 cm^2. Los bordes superior e inferior han de tener 2 cm cada uno y los bordes laterales 1 cm. Calcular las dimensiones del teléfono para que la superficie del mismo sea mínima. (2,5 puntos)



Añadamos las medidas de base y altura del Smartphone:



Superficie del Smartphone es

$$x \cdot y = 18 \Rightarrow y = \frac{18}{x}$$

Superficie es $f(x) = (x+2)(y+4) = (x+2)\left(\frac{18}{x}+4\right) = x \cdot \frac{18}{x} + 4x + 2 \cdot \frac{18}{x} + 8 = 18 + 4x + \frac{36}{x} + 8$

$$f(x) = 26 + 4x + \frac{36}{x}$$

Averigüemos su valor mínimo usando la derivada

$$f(x) = 26 + 4x + \frac{36}{x} \Rightarrow f'(x) = 4 - \frac{36}{x^2}$$

La igualamos a cero.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4 - \frac{36}{x^2} = 0 \Rightarrow 4x^2 - 36 = 0 \Rightarrow 4x^2 = 36 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \sqrt{9} = \pm 3$$

Solo es posible el valor positivo, es decir, $x = 3$

Como $f'(x) = 4 - \frac{36}{x^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{72x}{x^4} = \frac{72}{x^3}$

Veamos si $x = 3$ es mínimo utilizando el signo de la derivada segunda de la función.

$f''(3) = \frac{72}{3^3} > 0$. La función superficie del móvil presenta un mínimo en $x = 3$;

$y = \frac{18}{3} = 6$.

Las dimensiones de la pantalla del móvil es 3 cm y 6 cm. Y el móvil mide 5 cm y 10 cm.

3. Hallar la matriz X que cumple la ecuación matricial $A^{-1}XA = B$ siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ (2,5 puntos)

$$A^{-1}XA = B \Rightarrow A \cdot A^{-1}XA \cdot A^{-1} = A \cdot B \cdot A^{-1} \Rightarrow X = A \cdot B \cdot A^{-1}$$

Calculamos la inversa de la matriz A.

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}3 & -2\\ 1 & -1\end{pmatrix}}{\begin{vmatrix}3 & 1\\ -2 & -1\end{vmatrix}}=\frac{\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}}{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}$$

$$X=A\cdot B\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+2 & -3+1\\ -2-2 & 2-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}5 & -2\\ -4 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -2 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5+4 & 5+6\\ -4-2 & -4-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 11\\ -6 & -7\end{pmatrix}$$

La matriz es $X=\begin{pmatrix}9 & 11\\ -6 & -7\end{pmatrix}$

4. Dados la recta $r: x=y+1=\dfrac{z-\frac{11}{m}}{\frac{-3}{m}}$ y el plano $\pi: 2x+y+z=9$ se pide

a) Calcular el valor del parámetro m para que la recta r sea paralela al plano π (1,25 puntos)
b) Para m = 2, determinar el punto de intersección de la recta r y el plano π (1,25 puntos)

a) Para que recta y plano sean paralelos la primera condición es que vector director de recta $\vec{v_r}=\left(1,1,\frac{-3}{m}\right)$ y vector normal de plano $\vec{n}=(2,1,1)$ sean perpendiculares, es decir, su producto escalar debe ser 0.

$$\vec{v_r}\cdot\vec{n}=0\Rightarrow\left(1,1,\frac{-3}{m}\right)(2,1,1)=0\Rightarrow 2+1-\frac{3}{m}=0\Rightarrow 3m-3=0\Rightarrow\boxed{m=\frac{3}{3}=1}$$

En este caso la recta es $r: x=y+1=\dfrac{z-11}{-3}$ y el plano $\pi: 2x+y+z=9$ no son coincidentes ya que el punto P(0,–1,11) de la recta no está en el plano.

$$\left.\begin{array}{l}¿P(0,-1,11)\in\pi?\\ \pi: 2x+y+z=9\end{array}\right\}\Rightarrow ¿2\cdot 0-1+11=9?$$ No es cierto y el punto no está en el plano y recta y plano son paralelos.

b)

Para m = 2 la recta queda con ecuación $r: x=y+1=\dfrac{z-\frac{11}{2}}{\frac{-3}{2}}\Rightarrow r:\left.\begin{array}{l}x=t\\ y=-1+t\\ z=\frac{11}{2}-\frac{3}{2}t\end{array}\right\}$

Averigüemos el punto de intersección resolviendo el sistema formado por recta y plano.

$$\left\{\begin{array}{l}\pi : 2x+y+z=9 \\ r : \left.\begin{array}{l} x=t \\ y=-1+t \\ z=\frac{11}{2}-\frac{3}{2}t \end{array}\right\}\end{array}\right. \Rightarrow 2t-1+t+\frac{11}{2}-\frac{3}{2}t=9 \Rightarrow 4t-2+2t+11-3t=18$$

$$3t=9 \Rightarrow t=3 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=3 \\ y=-1+3=2 \\ z=\frac{11}{2}-\frac{3}{2}\cdot 3=\frac{2}{2}=1 \end{array}\right\}$$

El punto es $A(3,2,1)$