<u>Nota sobre la puntuación de las preguntas:</u> Los puntos asignados a las distintas preguntas son orientativos. En muchos casos, las preguntas pueden contestarse de varias formas distintas y el corrector debe utilizar la puntuación asignada en las soluciones que aquí se presentan, como guía para la asignación de la puntuación definitiva.

<u>Opción A</u>

1. Calcular el valor de los parámetros c y d sabiendo que la gráfica de la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^3 - x^2 + cx + d$, tiene como recta tangente en el punto P(1,-2) la recta de ecuación $y = 5x - 7$. (2,5 puntos)

<u>Solución:</u>

-- Como P, es un punto de tangencia, será un punto de la gráfica de f(x), por lo que se cumple que:

$f(1) = -2 \Rightarrow -2 = 2 \cdot 1^3 - 1^2 + c \cdot 1 + d = 1 + c + d$

Es decir: $-2 = 1 + c + d \Leftrightarrow c + d = -3 \quad (1)$

1 punto

-- Por otra parte, el valor de la derivada en el punto de tangencia $x = 1$ es igual a la pendiente de la recta tangente $y = 5x - 7$ que es 5, y como $f'(x) = 6x^2 - 2x + c$ se tiene

$f'(1) = 6 - 2 + c = 5 \Rightarrow \boxed{c = 5 - 6 + 2 = 1.}$

1 punto

-- Sustituyendo el valor de c en (1), se obtiene: $1 + d = -3 \Rightarrow \boxed{d = -4}$.

0,5puntos

2. Resolver las siguientes integrales

a) $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} \frac{(ln2x)^2}{3x} dx$ **(1,25 puntos)** **b)** $\int \frac{3x^4 + 5x^2 + \sqrt{x}}{x^2} dx$ **(1,25 puntos)**

<u>Solución:</u>

a) Resolvemos primero la integral indefinida $I = \int \frac{(\ln 2x)^2}{3x} dx$

-- Hacemos el cambio de variable $ln2x = t \ \to \frac{1}{x} dx = dt$ con lo que

$I = \int \frac{(\ln 2x)^2}{3x} dx = \int \frac{t^2}{3} dt = \frac{1}{3} \frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{9} (ln2x)^3 + C$

0,75 puntos

-- y aplicando ahora la regla de Barrow resulta

$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} \frac{(\ln 2x)^2}{3x} dx = \left[\frac{1}{9} (ln2x)^3\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{e}{2}} = \frac{1}{9} [(lne)^3 - (ln1)^3] = \frac{1}{9} [1 - 0] = \boxed{\frac{1}{9}}$

0,5 puntos

b) $\int \frac{3x^4 + 5x^2 + \sqrt{x}}{x^2} dx = 3 \int \frac{x^4}{x^2} dx + 5 \int \frac{x^2}{x^2} dx + \int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^2} dx = 3 \int x^2 dx + 5 \int dx + \int x^{-\frac{3}{2}} dx =$

$3 \frac{x^3}{3} + 5x + \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C = \boxed{x^3 + 5x - \frac{2}{\sqrt{x}} + C}$

1.25 puntos

3. Dadas las matrices:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{1} & \mathbf{-1}\end{pmatrix};\quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{x}-\mathbf{1} & \mathbf{-1}\end{pmatrix};\quad \mathbf{C}=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{2}\end{pmatrix}$$

a) Calcular el valor x para que se cumpla: $\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}^2=3\cdot\mathbf{I}_2$, donde $\mathbf{I}_2$ es la matriz identidad de orden 2. (1 punto)

b) Calcular la matriz X solución de la ecuación matricial: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{X}+\mathbf{C}^2=3\cdot\mathbf{I}_2$ (1,5 puntos)

<u>Solución:</u>

a)

-- $C^2=C\cdot C=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 5\end{pmatrix}$ 0,25 puntos

-- $3\cdot I_2=\ 3\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ 0,25 puntos

-- $A+B+C^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & x\\ x-1 & -1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & x-2\\ x-2 & 3\end{pmatrix}$ 0,25 puntos

-- Luego :$\begin{pmatrix}3 & x-2\\ x-2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\Rightarrow x-2=0\Rightarrow\boxed{x=2}$ 0,25 puntos

b)

-- $AX+C^2=3I_2\ \rightarrow AX=3I_2-C^2\ \rightarrow X=A^{-1}(3I_2-C^2)$ 0,5 puntos

-- Calculamos A^{-1}

$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\rightarrow |A|=-1\rightarrow A^t=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{pmatrix}\rightarrow Adj(A^t)=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\rightarrow$

$\rightarrow A^{-1}=\frac{Adj(A^t)}{|A|}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ 0,5 puntos

-- $3I_2-C^2=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}$

-- Entonces $X=A^{-1}(3I_2-C^2)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}=\boxed{\begin{pmatrix}2 & 2\\ 0 & 4\end{pmatrix}}$ 0,5 puntos

4. Dado el plano $\boldsymbol{\pi}: \mathbf{5}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{ay}+\mathbf{4}\boldsymbol{z}-\mathbf{5}=\mathbf{0}$ y la recta $\boldsymbol{r}$: $\frac{x}{2}=\frac{y-2}{6}=\frac{z-2}{-4}$, se pide:

a) Calcular el valor del parámetro $\boldsymbol{a}$ para que la recta $\boldsymbol{r}$ sea paralela al plano $\boldsymbol{\pi}$. (1,25 puntos)

b) Para $\boldsymbol{a}=\mathbf{0}$, calcular el ángulo que forman el plano $\boldsymbol{\pi}$ y la recta $\boldsymbol{r}$. (1,25 puntos)

<u>Solución:</u>

a) -- Si el plano π es paralelo a la recta r, entonces vector normal a π es perpendicular al vector dirección de r y el producto escalar de ambos vectores es 0 | 0,25 puntos

Hallamos

-- Vector dirección de r : $v_r = (2, 6, -4)$ | 0,25 puntos

-- Vector normal a π: $n_\pi = (5, a, 4)$ | 0,25 puntos

-- Calculamos su producto escalar , lo igualamos a 0 y despejamos a

$$v_r \cdot n_\pi = (2 \ \ 6 \ \ -4)\begin{pmatrix}5\\a\\4\end{pmatrix} = 10 + 6a - 16 = 6a - 6 = 0 \ \ \rightarrow \boxed{a = 1}$$ 0,5 puntos

b) Si $a = 0$, entonces $n_\pi = (5, 0, 4)$.

Llamemos α al ángulo entre r y π, entonces,

-- $\operatorname{sen}(\alpha) = \frac{\langle v_r, n_\pi \rangle}{\|v_r\|\|n_\pi\|} = \frac{10+0-16}{\sqrt{2^2+6^2+(-4)^2}\sqrt{5^2+0^2+4^2}} = \frac{-6}{\sqrt{56}\sqrt{41}} = \frac{-6}{\sqrt{2296}} = \frac{-6}{47,91} = -0,1252$ | 1 punto

luego, $\alpha = arcsen(-0,1252) \approx 7,1923°$ | 0,25 puntos

<u>Nota sobre la puntuación de las preguntas:</u> Los puntos asignados a las distintas preguntas son orientativos. En muchos casos, las preguntas pueden contestarse de varias formas distintas y el corrector debe utilizar la puntuación asignada en las soluciones que aquí se presentan, como guía para la asignación de la puntuación definitiva.

<u>Opción B</u>

1. Dada la función $f(x) = \frac{x^2}{e^{x^2}}$ se pide:

a) Determinar los intervalos de crecimiento y los de decrecimiento **(1,5 puntos)**

b) Calcular los máximos y mínimos relativos **(1 punto)**

<u>Solución:</u>

a) -- Calculamos la derivada primera de $f(x)$

$$f'(x) = \frac{e^{x^2}2x - x^2 e^{x^2}2x}{\left(e^{x^2}\right)^2} = \frac{2x - 2x^3}{e^{x^2}}$$ 0,5 puntos

-- Calculamos los puntos donde se anula $f'(x)$

$$\frac{2x-2x^3}{e^{x^2}} = 0 \ \rightarrow 2x - 2x^3 = 0 \ \rightarrow 2x(1-x^2) = 0 \ \rightarrow x(1-x)(1+x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 0, \ x = 1, \ x = -1$$ 0,5 puntos

-- Estudiamos el signo de $f'(x)$ y se tiene:

$f'(x) > 0$ en los intervalos $(-\infty, -1)\ y\ (0,1) \Rightarrow f(x)$ creciente en $(-\infty, -1)$ y en $(0,1)$

$f'(x) < 0$ en los intervalos (-1,0) y $(1, \infty) \Rightarrow f(x)$ decreciente en $(-1,0)$ y en $(1, \infty)$ 0,5 puntos

b) -- Del estudio del crecimiento y decrecimiento de la función se deduce inmediatamente que:

- existe un máximo en $x = -1$. El punto donde está ese máximo es $\left(-1, f(-1)\right) = (-1, \frac{1}{e})$
- existe un mínimo en $x = 0$. El punto donde está ese mínimo es $\left(0, f(0)\right) = (0,0)$ 1 punto
- existe un máximo en $x = 1$. El punto donde está ese máximo es $\left(1, f(1)\right) = (1, \frac{1}{e})$

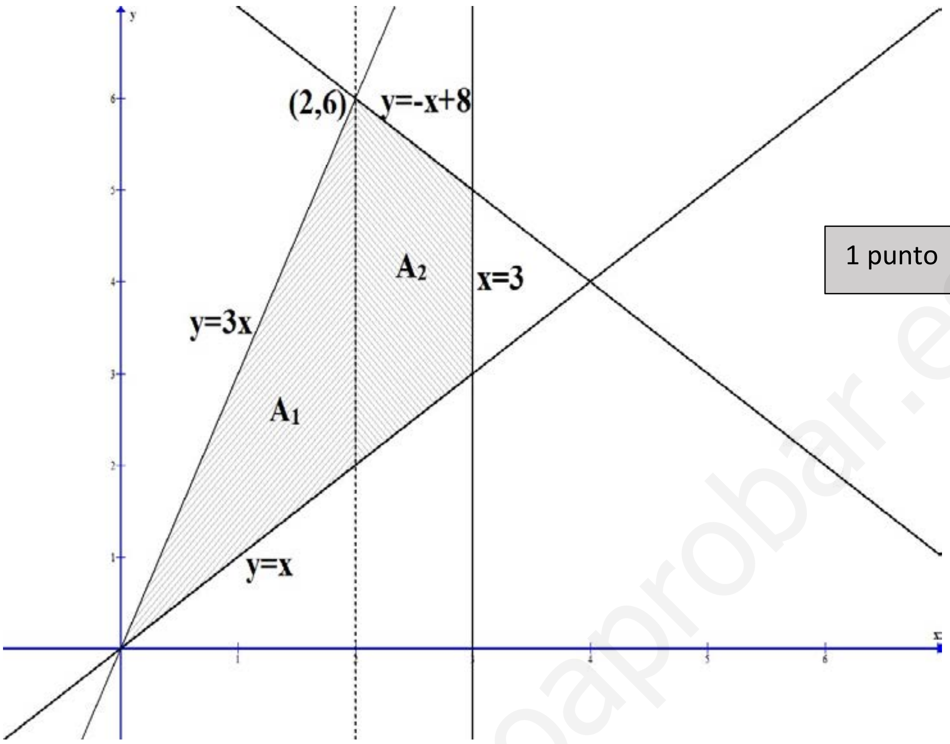
2. Dibujar y calcular el área de la región del plano limitada por las siguientes rectas:

$\boldsymbol{y = 3x}$; $\boldsymbol{y = x}$; $\boldsymbol{y = -x + 8}$; $\boldsymbol{x = 3}$ **(2,5 puntos)**

<u>Solución:</u>

-- Calculamos el punto de corte de las rectas $y = 3x$ e $y = -x + 8$ resolviendo el sistema que forman las ecuaciones de ambas líneas.

$$\left.\begin{array}{r} y = 3x \\ y = -x+8 \end{array}\right\} \rightarrow 3x = -x+8 \ \rightarrow 4x = 8 \ \rightarrow x = 2 \ \rightarrow punto\ (2,6)$$



1 punto

Se tiene entonces:

$$A = A_1 + A_2 = \int_0^2 (3x - x)dx + \int_2^3 [(-x+8) - x]dx = \int_0^2 2xdx + \int_2^3 (-2x+8)dx =$$

$$= \left[\frac{2x^2}{2}\right]_0^2 + \left[-\frac{2x^2}{2} + 8x\right]_2^3 = (4-0) + [(-9+24) - (-4+16)] = \boxed{7}$$

1,5 puntos

3. Sea el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{c} \boldsymbol{2x + y + kz = 1} \\ \boldsymbol{kx + 2y - z = -2} \\ \boldsymbol{y - 3z = -3} \end{array}\right\}$$

a) Estudiarlo y clasificarlo para los distintos valores del parámetro *k*. **(1,5 puntos)**

b) Resolverlo para *k* = 2 **(1 punto)**

<u>Solución:</u>

a) -- Sea $\mathrm{M}=\begin{pmatrix}2 & 1 & k\\ k & 2 & -1\\ 0 & 1 & -3\end{pmatrix}$ la matriz de coeficientes y $\mathrm{M}^*=\begin{pmatrix}2 & 1 & k & 1\\ k & 2 & -1 & -2\\ 0 & 1 & -3 & -3\end{pmatrix}$ la matriz ampliada del sistema.

-- $\det(\mathrm{M})=\begin{vmatrix}2 & 1 & k\\ k & 2 & -1\\ 0 & 1 & -3\end{vmatrix}=k^2+3k-10=0 \to k=2$ y $k=-5$.

0,25 puntos

Entonces

-- **Si $k\neq 2$ y $k\neq -5$** $\to \det(\mathrm{M})\neq 0 \to Rang(\mathrm{M})=Rang(\mathrm{M}^*)=3 \to$ **SCD**

0,25 puntos

-- **Si $k=2$** $\to \det(\mathrm{M})=0$ y como $\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-5\neq 0 \to Rang(\mathrm{M})=2$

Además

$\mathrm{M}^*=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & -1 & -2\\ 0 & 1 & -3 & -3\end{pmatrix}$ tiene rango 2 pues $\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & -2\\ 1 & -3 & -3\end{vmatrix}=0$

por lo tanto:

$Rang(\mathrm{M})=Rang(\mathrm{M}^*)=2 \to$ **SCI**

0,5 puntos

-- **Si $k=-5$** $\to \det(\mathrm{M})=0$ y como $\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & -3\end{vmatrix}=-5\neq 0 \to Rang(\mathrm{M})=2$

Además

$\mathrm{M}^*=\begin{pmatrix}2 & 1 & -5 & 1\\ -5 & 2 & -1 & -2\\ 0 & 1 & -3 & -3\end{pmatrix}$ tiene rango 3 pues el menor $\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ -5 & 2 & -2\\ 0 & 1 & -3\end{vmatrix}=-28\neq 0$

por lo tanto:

$Rang(\mathrm{M})=2\ y\ Rang(\mathrm{M}^*)=3 \to$ **SI**

0,5 puntos

b) -- Para $k=2$ el sistema es equivalente al siguiente:

$$\left.\begin{aligned}2x+2y-z&=-2\\ y-3z&=-3\end{aligned}\right\}$$ y si hacemos $z=t$ resulta

$$\left.\begin{aligned}2x+2y&=-2+t\\ y&=-3+3t\end{aligned}\right\} \to 2x+2(-3+3t)=-2+t \to x=-\frac{5t}{2}+2$$

Luego la solución del sistema es

$$\boxed{\begin{cases}x=-\frac{5t}{2}+2\\ y=3t-3\\ z=t\end{cases}}$$

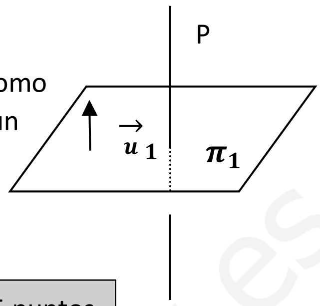
1 punto

4. Dados los planos: π_1: $x - y + 3 = 0$; π_2: $2x + y - z = 0$, determinar:

a) La ecuación de la recta perpendicular a π_1 que pasa por el punto $P(2, 2, 1)$. (1 punto)

b) La ecuación del plano perpendicular a la recta que determinan π_1 y π_2 que contiene al punto $A(1, 1, -1)$. (1,5 puntos)

Solución:



a.- La recta perpendicular a π_1 y que contiene a P tendrá como determinación lineal el par $(P, \vec{u_1})$, siendo $\vec{u_1} = (1, -1, 0)$, un vector perpendicular a π_1. 0,25 puntos

Las ecuaciones paramétricas de la recta son:

$$\boxed{\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 1 \end{cases}}$$

0,75 puntos

b.- La recta que determinan π_1 y π_2, se obtiene resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de ambos planos:

$\left.\begin{array}{r} x - y = 3 \\ 2x + y - z = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow$ Si hacemos $y = \lambda$, tenemos: la ecuación en forma paramétrica de la recta pedida:

$$r \equiv \begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -6 + 3\lambda \end{cases}$$

0,5 puntos

El plano pedido, tendrá como vector característico, el vector de dirección de la recta r, es decir el vector $\vec{v} = (1, 1, 3)$ y su ecuación general será:

$x + y + 3z + d = 0$, que como pasa por el punto $A(1, 1, -1)$, se verifica que: $1 + 1 - 3 + d = 0 \Longrightarrow d = 1$

Entonces la ecuación general del plano es: $\boxed{x + y + 3z + 1 = 0}$ 1 punto