

**Ejercicio 1.**

Sea  $A$  una matriz cuadrada que verifica  $A^2 = I - 2A$ , donde  $I$  denota la matriz identidad.

- Probar que  $\det(A) \neq 0$  y encontrar  $A^{-1}$ .
- Calcular dos números  $p$  y  $q$  tales que  $A^4 = p \cdot I + q \cdot A$ .
- Si  $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix}$  cumple la relación de partida, calcular el valor de  $k$ .

Sabemos que se cumple  $A^2 = I - 2A \Rightarrow A^2 + 2A = I \Rightarrow A(A + 2I) = I \Rightarrow |A(A + 2I)| = |I| \Rightarrow |A||A + 2I| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0$ .

Como tenemos  $A(A + 2I) = I \Rightarrow A^{-1} = A + 2I$

$A^4 = A^2 \cdot A^2 = (I - 2A) \cdot (I - 2A) = I - 4A + 4A^2 = I - 4A + 4(I - 2A) = 5I - 12A$ , entonces  $p = 5$  y  $q = -12$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2+k \\ -2+k & 1+k^2 \end{pmatrix}$$

$$I - 2A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 2k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1-2k \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & -2+k \\ -2+k & 1+k^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1-2k \end{pmatrix}$$

$$\text{entonces} \quad \begin{cases} -2+k = -2 \\ 1+k^2 = 1-2k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k^2 + 2k = 0 \Rightarrow k = 0, k = -2 \end{cases} \Rightarrow k = 0$$

**Ejercicio 2.**

- Sea  $A$  una matriz  $4 \times 4$  tal que  $|A| = -2$ , calcula, justificando la respuesta:

$$|3A|; |-A^{-1}|; |A^4|; |2A \cdot A^{-1}|; |A \cdot A^t|; |(A^t)^{-1}|; |(A^{-1})^t|$$

- Demostrar que si  $A$  es una matriz  $3 \times 3$  tal que  $A^t = -A$ , entonces  $|A| = 0$ . ¿Y si  $A$  es una matriz  $n \times n$ , se verifica lo anterior?

$$* |3A| = 3^4 \cdot |A| = 81 \cdot (-2) = -162 \quad (A \text{ es una matriz } 4 \times 4)$$

$$\text{Como } A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow |A \cdot A^{-1}| = |I| \Rightarrow |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

$$* |-A^{-1}| = (-1)^4 \cdot |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = -\frac{1}{2}$$

$$* |A^4| = |A \cdot A \cdot A \cdot A| = |A| \cdot |A| \cdot |A| \cdot |A| = (-2)^4 = 16$$

$$* |2A \cdot A^{-1}| = |2I| = 2^4 \cdot |I| = 16$$

$$* |A \cdot A^t| = |A| \cdot |A^t| = |A| \cdot |A| = (-2)^2 = 4$$

$$* |(A^t)^{-1}| = \frac{1}{|A^t|} = \frac{1}{|A|} = -\frac{1}{2}$$

$$* |(A^{-1})^t| = |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = -\frac{1}{2}$$

Sabemos que se cumple  $|A|=|A^t|$ ; como  $A \in M_{3 \times 3} \Rightarrow |-A|=(-1)^3 \cdot |A|=-|A|$ , entonces

$$A^t = -A \Rightarrow |A^t|=|-A| \Rightarrow |A|=-|A| \Rightarrow |A|=0$$

Si  $A \in M_{n \times n} \Rightarrow |-A|=(-1)^n |A| \Rightarrow$  si  $n$  es impar  $|A|=0$ , si  $n$  es par no se puede asegurar que  $|A|=0$ .

**Ejercicio 3.**

Hallar una matriz  $X$  tal que  $A \cdot X \cdot A^t = B$ , siendo  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

$$A \cdot X \cdot A^t = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot X \cdot (A^t)^{-1}, \text{ pero } (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t \Rightarrow X = A^{-1} \cdot X \cdot (A^{-1})^t$$

$$|A|=1$$

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 & A_{21} &= -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 & A_{31} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \\ A_{12} &= -\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 1 & A_{22} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 2 & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \\ A_{13} &= \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = -2 & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 1 & A_{33} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \end{aligned} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & -4 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 4.**

Resuelve la siguiente ecuación:

$$\begin{vmatrix} 5 & x & x & 3 \\ x & 5 & 3 & x \\ x & 3 & 5 & x \\ 3 & x & x & 5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 5 & x & x & 3 \\ x & 5 & 3 & x \\ x & 3 & 5 & x \\ 3 & x & x & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} C_4=C_4-C_1 \\ C_3=C_3-C_2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 5 & x & 0 & -2 \\ x & 5 & -2 & 0 \\ x & 3 & 2 & 0 \\ 3 & x & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} F_1=F_1+F_4 \\ F_2=F_2+F_3 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 8 & 2x & 0 & 0 \\ 2x & 8 & 0 & 0 \\ x & 3 & 2 & 0 \\ 3 & x & 0 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{desarrollo por } C_4 \\ \text{desarrollo por } C_3 \end{matrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 2x & 0 \\ 2x & 8 & 0 \\ x & 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 8 & 2x \\ 2x & 8 \end{vmatrix} = 4 \cdot (64 - 4x^2)$$

$$\Rightarrow 4(64 - 4x^2) = 0 \Rightarrow 16 - x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=-4 \end{cases}$$