# MATEMÁTICAS II

Se presentan los ejercicios con un procedimiento para resolverlos. Naturalmente, los procedimientos propuestos no son los únicos posibles.

## OPCIÓN A

---

**1.** Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & m-1 \\ 1 & m-1 & m & 1 \\ m-1 & 1 & m & 1 \end{pmatrix}$ donde $\boldsymbol{m}$ es un número real.

**a)** Estudiar el rango de $A$ según los valores de $\boldsymbol{m}$. (1.5 puntos)

**b)** Para $\boldsymbol{m} = -1$, calcula la solución, si existe, del sistema (1 punto)

$$A^t \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (A^t \quad \text{matriz traspuesta})$$

---

**a)** Aplicando Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & m-1 \\ 1 & m-1 & m & 1 \\ m-1 & 1 & m & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2 = F_2 - F_1 \\ F_3 = F_3 - (m-1)F_1}}{\equiv} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & m-1 \\ 0 & m-2 & m-2 & 2-m \\ 0 & 2-m & 2-m & 2m-m^2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{F_3 = F_3 + F_2}{\equiv} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & m-1 \\ 0 & m-2 & m-2 & 2-m \\ 0 & 0 & 0 & 2+m-m^2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & m-1 \\ 0 & m-2 & m-2 & 2-m \\ 0 & 0 & 0 & (1+m)(2-m) \end{pmatrix}$$

1. Si $m \neq -1$ y $m \neq 2$ las tres filas son independientes, por tanto, el rango es 3.
2. Si $m = -1$ la última fila es nula y el rango es 2.
3. Si $m = 2$ las dos últimas fila son nulas y el rango es 1.

**b)** Para $m = -1$, rango($A^t$)= rango($A$)= 2 .

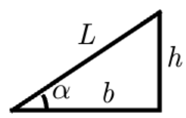
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \underset{\substack{F_2 = F_2 - F_1 \\ F_3 = F_3 - 2F_1 \\ F_4 = F_4 + 2F_1}}{\equiv} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \equiv$$

$$\equiv \left.\begin{array}{r} x + y - 2z = 0 \\ y - z = 0 \end{array}\right\} \implies x = y = z = \lambda \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

---

**2.** Se quiere construir una rampa(ver gráfica) para camiones con una pendiente $m = \tan(\alpha) > 0$ y que salve una altura $h = 20$ metros.

**a)** Calcula, en función de $m$, el valor de $b$ y comprueba que la longitud de la rampa $L$ se puede expresar como $L(m) = 20\sqrt{\dfrac{m^2+1}{m^2}}$ (0.5 puntos)




www.yoquieroaprobar.es

**b)** El camión se mueve a una velocidad constante que depende de la pendiente $m$ y se expresa, en metros por segundo, a través de la función $v(m) = \dfrac{1}{\sqrt{m}}$. Demuestra que el tiempo $t$, en segundos, que tarda un camión en recorrer la rampa se puede expresar como $t(m) = 20\sqrt{\dfrac{m^2+1}{m}}$ (0.5 puntos)

**c)** Calcula la pendiente $m$ que hace mínimo el tiempo de recorrido de un camión. (1.5 puntos)

(Se recuerda que tan = tangente y velocidad=espacio/tiempo) .

---

**a)** Se tiene que

$$\boldsymbol{0 < m} = \tan(\alpha) = \frac{20}{b} \qquad \Longleftrightarrow \qquad b(m) = \frac{20}{m}$$

$$L(m) = \sqrt{20^2 + b^2} = \sqrt{20^2 + \frac{20^2}{m^2}} = 20\sqrt{\frac{m^2+1}{m^2}}$$

**b)**

$$t(m) = \frac{L(m)}{v(m)} = \frac{20\sqrt{\dfrac{m^2+1}{m^2}}}{1/\sqrt{m}} = 20\sqrt{\frac{m^2+1}{m}}$$

**c)** Calculamos la derivada de la función

$$t'(m) = \frac{20}{2}\frac{m^2-1}{m^2\sqrt{\dfrac{m^2+1}{m}}} = 10\frac{m^2-1}{\sqrt{m^3(m^2+1)}}$$

Recordemos que $m > 0$

$$t'(m) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad m^2 - 1 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{m = 1}$$

(Se descarta el $m = -1$)

Analizamos los valores de $t'(m)$ por la izquierda y derecha de $m = 1$

$$t'(1^-) < 0 \qquad \Longrightarrow \qquad t(m) \text{ decreciente}$$

$$t'(1^+) > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad t(m) \text{ creciente}$$

luego, se comprueba que es mínimo.

---

**3.** Sean $r$ y $s$ dos rectas perpendiculares que se cortan. La recta $r$ viene dada por las ecuaciones $r: \dfrac{x-1}{2} = y + 1 = -z + 2$. Calcula:

**a)** Un vector director $\vec{v}_1$ de $r$. (0.75 puntos)

**b)** Un vector director $\vec{v}_2$ de $s$ sabiendo que $\vec{v}_1 \times \vec{v}_2$ es proporcional al vector $(1, 0, 2)$. (1 punto)

**c)** Las ecuaciones del plano $\pi$ que contiene ambas rectas. (0.75 puntos)

---

**a)** Un vector director de $r$ será

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-1} \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{\vec{v}_1 = (2, 1, -1)}$$

www.yoquieroaprobar.es

**b)** Si $r$ y $s$ son perpendiculares también lo serán $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ y como $\vec{w} = (1, 0, 2)$ es perpendicular a ambos, se tendrá que

$$\boldsymbol{\vec{v}_2} = \vec{v}_1 \times \vec{w} \ = \ \mathbf{(2, -5, -1)}$$

es un vector director de $s$.

**c)** Un vector normal al plano $\pi$ será $\vec{w}$. Luego la ecuación de $\pi$ será

$$\pi \ : \ x + 2z + d = 0$$

Además $A(1, -1, 2) \in r \subset \pi \quad \Longrightarrow \quad 5 + d = 0$

$$\boldsymbol{\pi \ : \ x + 2z = 5}$$

---

**4.** En un espacio muestral se tienen dos sucesos independientes: $A$ y $B$. Se conocen las siguientes probabilidades: $p(A \cap B) = 0.3$ y $p(A/B) = 0.5$. Calcula:

**a)** $p(A)$ y $p(B)$. (1 punto)

**b)** $p(A \cup B)$ y $p(B/A)$. (1 punto)

**c)** La probabilidad de que no ocurra ni el suceso $A$ ni el suceso $B$. (0.5 puntos)

---

**a)** Para calcular $p(B)$, aplicamos

$$p(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A/B)} = \boldsymbol{\frac{3}{5} = 0.6}$$

y como los sucesos son independientes

$$p(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \boldsymbol{\frac{1}{2} = 0.5}$$

**b)**

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \boldsymbol{\frac{4}{5} = 0.8}$$

$$p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \boldsymbol{\frac{3}{5} = 0.6}$$

**c)** La probabilidad de que no ocurra ni el suceso $A$ ni el suceso $B$ es el suceso contrario a $A \cup B$

$$p(\overline{A} \cap \overline{B}) = p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) = \boldsymbol{\frac{1}{5} = 0.2}$$

www.yoquieroaprobar.es

## OPCIÓN B

**1.** Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**a)** Calcula, si existe, la inversa de $B$. (1 punto)
**b)** Determina, si existe, la matriz $X$ que verifica la relación $AXB = C$. (1.5 puntos)

---

**a)** Calculamos su determinante

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \overset{F_3=F_3-F_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

Por tanto, la matriz posee inversa

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad |B| = -1 \qquad \boldsymbol{B^{-1}} = -\left(\text{Adj}(B)\right)^t = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

**b)** Como $|A| = 1$, se tiene que $A$ posee inversa

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad |A| = 1 \qquad A^{-1} = \left(\text{Adj}(A)\right)^t = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y entonces la ecuación $AXB = C$ se puede despejar

$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$$

---

**2.** Dada la función $\quad f(x) = \dfrac{1}{x^2+x-6}$

**a)** Estudia su dominio de definición y calcula sus asíntotas. (0.75 puntos)
**b)** Estudia sus máximos, mínimos y puntos de inflexión. (0.75 puntos)
**c)** Calcula una primitiva de la función $f(x)$. (1 punto)

---

**a)** $\dfrac{1}{x^2+x-6} = \dfrac{1}{(x+3)(x-2)}$. Salvo en los puntos $\boldsymbol{x=2}$ y $\boldsymbol{x=-3}$ la función existe y es continua y derivable.

• Asíntotas verticales. Veamos en esos puntos sus límites laterales:

$$\lim_{x\to -3^+} \frac{1}{x^2+x-6} = -\infty \qquad \lim_{x\to -3^-} \frac{1}{x^2+x-6} = +\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x^2+x-6} = +\infty \qquad \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x^2+x-6} = -\infty$$

Las rectas $\boldsymbol{x=2}$ , $\boldsymbol{x=-3}$ son **asíntotas verticales**.

• Asíntotas horizontales.

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{1}{x^2+x-6} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \text{La recta } \boldsymbol{y=0} \text{ es } \textbf{asíntota horizontal.}$$

• Asíntotas oblicuas

$$\lim_{x\to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{1}{x(x^2+x-6)} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \textbf{no hay asíntotas oblicuas}$$

www.yoquieroaprobar.es

**b)** La derivada de la función es

$$f'(x) \;=\; \frac{-(2x+1)}{(x^2+x-6)^2}$$

con punto crítico $x=-1/2$. La derivada segunda es

$$f''(x) \;=\; \frac{(2(3x^2+3x+7))}{(x^2+x-6)^3}$$

el numerador no tiene raíces reales, luego **no existen puntos de inflexión** y

$$\boldsymbol{A\left(\frac{-1}{2},\frac{-4}{25}\right)} \qquad f''\left(\frac{-1}{2}\right)<0 \qquad \textbf{máximo}$$

**c)** Para calcular la primitiva se descompone la función en fracciones elementales

$$\frac{1}{x^2+x-6} \;=\; \frac{1}{(x+3)(x-2)} \;=\; \frac{1}{5}\,\frac{1}{(x-2)}-\frac{1}{5}\,\frac{1}{(x+3)}$$

y el cálculo de la primitiva

$$\int \frac{1}{x^2+x-6}\,dx \;=\; \int\left[\frac{1}{5}\,\frac{1}{(x-2)}-\frac{1}{5}\,\frac{1}{(x+3)}\right]dx \;=\; \int\frac{1}{5}\,\frac{1}{(x-2)}\,dx \;-\; \int\frac{1}{5}\,\frac{1}{(x+3)}\,dx \;=$$

$$=\;\frac{1}{5}\,\ln(|x-2|)-\frac{1}{5}\,\ln(|x+3|)+C \;=\; \ln\left(\left|\frac{x-2}{x+3}\right|^{1/5}\right)+C$$

---

**3.** Dado la recta $r:\left\{\begin{array}{l} y=1\\ z=0\end{array}\right.$, el punto $Q(1,1,1)$ y un plano $\pi$.

**a)** Calcula el punto $P$ de la recta $r$ que verifica $d(P,Q)=1\,u$. (1.25 puntos)
**b)** Se sabe que $Q\in\pi$ y que $d(P,Q)=d(P,\pi)$. Determina la ecuación del plano $\pi$. (1.25 puntos)

---

**a)** Un punto de la recta es del tipo

$$P(\lambda,1,0) \qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

Luego si $d(P,Q)=1$.

$$\sqrt{(\lambda-1)^2+1}=1 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda=1 \qquad \Longrightarrow \qquad \boldsymbol{P(1,1,0)}$$

**b)** Según los datos del problema se tiene que el vector $\overrightarrow{PQ}=(0,0,1)$ es normal al plano $\pi$. Luego

$$\pi\;:\;z+d=0$$

Si $Q\in\pi$

$$\boldsymbol{\pi\quad:\quad z=1}$$

---

**4.** En la siguiente tabla se muestra la distribución de un grupo de personas en relación al consumo de tabaco:

| | Fumador | No fumador |
|---|---|---|
| Hombres | 10 | 30 |
| Mujeres | 20 | 40 |

www.yoquieroaprobar.es

Se elige en ese grupo una persona al azar. Calcula las probabilidades de los siguientes sucesos diferentes:

**a)** Sea fumador. (0.5 puntos)

**b)** Sabiendo que es fumador, se trate de una mujer. (1 punto)

**c)** Se extrae una segunda persona al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que una fume y la otra no? (1 punto)

---

Según la tabla tendremos que el número total de personas es $T = 100$, el de hombres $H = 40$, el de mujeres $M = 60$, el de fumadores $F = 30$, y el de no fumadores $NF = 70$

**a)**

$$p(F) = \frac{30}{100} = \mathbf{\frac{3}{10} = 0.3}$$

**b)**

$$p(M/F) = \frac{p(M \cap F)}{p(F)}$$

donde

$$p(M \cap F) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5} = 0.2$$

$$p(M/F) = \frac{p(M \cap F)}{p(F)} = \mathbf{\frac{2}{3} = 0.6667}$$

**c)** En el nuevo espacio muestral se tendrá:

$$p(F \cap NF) = \frac{\binom{30}{1}\binom{70}{1}}{\binom{100}{2}} = \mathbf{\frac{14}{33} = 0.4242}$$

www.yoquieroaprobar.es