Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2018-2019 CONVOCATORIA: JUNIO

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

Realiza una de las opciones A o B

OPCIÓN A

A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a+2)x-y-az=-a \\ (-a-2)x+2y+\left(a^2-a\right)z=3a-1 \\ (a+2)x-2y+(2-2a)z=-2a \end{cases}$$

(3 puntos)

A2) Dadas las siguientes rectas:

$$r\equiv\begin{cases} 2x+y-2z-1=0 \\ y+z+1=0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s\equiv\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{2}$$

calcula la ecuación de un plano π paralelo a la recta r y que diste de s 3 unidades. (2 puntos)

A3) Calcula la derivada de las siguientes funciones y simplifica el resultado:

$$f(x)=\ln\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}}$$ (1 punto)

$$g(x)=\left(\frac{1}{x}\right)^{-x}$$ (1 punto)

A4) Demuestra que existe $\alpha\in(-1,3)$ tal que $f\,'(\alpha)=-\frac{1}{4}$, siendo

$$f(x)=\left[x^2+\log\left(x^2-2x+7\right)\right]^{\sqrt[3]{\frac{3-x}{4}}}$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (3 puntos)

OPCIÓN B

B1) Resuelve la ecuación matricial $X \cdot A^{35} = A^{25}$ teniendo en cuenta que A es la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2 puntos)

B2) $P \equiv (1,-1,1)$, $Q \equiv (5,-3,5)$, $R \equiv (7,-7,1)$ son tres vértices de una cara de un cubo. Calcula las coordenadas del centro de dicho cubo.

(3 puntos)

B3) Demuestra que existe $\alpha \in (1,3)$ tal que $f(\alpha) = 0$, siendo

$$f(x) = \frac{\ln\left[x - 1 + \sin^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right]}{4x - x^2}$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

(2 puntos)

B4) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de las funciones $f(x) = 5 - x$ y $g(x) = \frac{2}{x-2}$ y calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

(3 puntos)

SOLUCIONES

OPCIÓN A

A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a+2)x-y-a\cdot z=-a \\ (-a-2)x+2y+\left(a^2-a\right)z=3a-1 \\ (a+2)x-2y+(2-2a)z=-2a \end{cases}$$

(3 puntos)

La matriz de coeficientes asociada al sistema es

$$A=\begin{pmatrix} a+2 & -1 & -a \\ -a-2 & 2 & a^2-a \\ a+2 & -2 & 2-2a \end{pmatrix} \text{ con determinante}$$

$$|A|=\begin{vmatrix} a+2 & -1 & -a \\ -a-2 & 2 & a^2-a \\ a+2 & -2 & 2-2a \end{vmatrix}=\{\text{Sacamos factor comun } a+2 \text{ en la } 1^{\text{a}} \text{ columna}\}=$$

$$=(a+2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -a \\ -1 & 2 & a^2-a \\ 1 & -2 & 2-2a \end{vmatrix}=(a+2)\left(4-4a-a^2+a-2a+2a-2+2a+2a^2-2a\right)=$$

$$=(a+2)\left(a^2-3a+2\right)$$

Si lo igualamos a cero.

$$|A|=0\Rightarrow(a+2)\left(a^2-3a+2\right)=0\Rightarrow\begin{cases} a+2=0\Rightarrow a=-2 \\ a^2-3a+2=0\Rightarrow a=\dfrac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\dfrac{3\pm1}{2}=\begin{cases} =\dfrac{3+1}{2}=2 \\ =\dfrac{3-1}{2}=1 \end{cases} \end{cases}$$

Hay cuatro casos distintos a considerar.

CASO 1. $a\neq 2$ y $a\neq 1$ y $a\neq -2$

En esta situación el sistema es compatible determinado ya que el rango de la matriz de los coeficientes es 3 al igual que el de la ampliada y el número de incógnitas.

Su solución se puede obtener por Cramer.

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -a & -1 & -a \\ 3a-1 & 2 & a^2-a \\ -2a & -2 & 2-2a \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{-4a+4a^2+2a^3-2a^2+6a^2-2a-4a^2-2+2a+6a-6a^2-2a^3+2a^2}{(a+2)\left(a^2-3a+2\right)}$$

$$x=\frac{-2+2a}{(a+2)\left(a^2-3a+2\right)}=\frac{2\cancel{(a-1)}}{(a+2)\cancel{(a-1)}(a-2)}=\frac{2}{a^2-4}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a+2 & -a & -a \\ -a-2 & 3a-1 & a^2-a \\ a+2 & -2a & 2-2a \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{\cancel{(a+2)}\begin{vmatrix} 1 & -a & -a \\ -1 & 3a-1 & a^2-a \\ 1 & -2a & 2-2a \end{vmatrix}}{\cancel{(a+2)}\left(a^2-3a+2\right)}=$$

$$y=\frac{6a-6a^2-2+2a-a^3+a^2-2a^2+3a^2-a-2a+\cancel{2a^2}+2a^3-\cancel{2a^2}}{a^2-3a+2}$$

$$y=\frac{a^3-4a^2+5a-2}{a^2-3a+2}=\frac{\cancel{(a-1)}\cancel{(a-2)}(a-1)}{\cancel{(a-1)}\cancel{(a-2)}}=a-1$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} a+2 & -1 & -a \\ -a-2 & 2 & 3a-1 \\ a+2 & -2 & -2a \end{vmatrix}}{|A|}=\frac{\cancel{(a+2)}\begin{vmatrix} 1 & -1 & -a \\ -1 & 2 & 3a-1 \\ 1 & -2 & -2a \end{vmatrix}}{\cancel{(a+2)}\left(a^2-3a+2\right)}=\frac{-4a-3a+1-\cancel{2a}+\cancel{2a}+2a+6a-2}{a^2-3a+2}$$

$$z=\frac{a-1}{a^2-3a+2}=\frac{\cancel{a-1}}{\cancel{(a-1)}(a-2)}=\frac{1}{a-2}$$

La solución es $x=\dfrac{2}{a^2-4}$; $y=a-1$; $z=\dfrac{1}{a-2}$

CASO 2. $a=-2$

El sistema queda

$$\begin{cases} -y+2z=2 \\ 2y+6z=-7 \\ -2y+6z=4 \end{cases}\Rightarrow\{\text{Divido la ecuación 3ª entre 2}\}\Rightarrow\begin{cases} -y+2z=2 \\ 2y+6z=-7 \\ -y+3z=2 \end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{Bmatrix} \text{Ecuación 3ª - Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{rrl} -y & +3z & =2 \\ y & -2z & =-2 \\ \hline & z & =0 \end{array} \end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{cases} -y=2 \\ 2y=-7 \\ z=0 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} y=-2 \\ y=-7/2 \\ z=0 \end{cases}$$

Este sistema es incompatible.

CASO 3. $a=2$

El sistema queda

$$\begin{cases} 4x-y-2z=-2 \\ -4x+2y+2z=5 \\ 4x-2y-2z=-4 \end{cases}\Rightarrow\begin{Bmatrix} \text{Ecuación 3ª + Ecuación 2ª} \\ \begin{array}{rrrl} 4x & -2y & -2z & =-4 \\ -4y & +2y & +2z & =5 \\ \hline & & 0 & =1 \end{array} \end{Bmatrix}\Rightarrow\begin{cases} 4x-y-2z=-2 \\ -4x+2y+2z=5 \\ 0=1 \end{cases}$$

Este sistema es incompatible

CASO 4. $a=1$

El sistema queda

$$\begin{cases}3x-y-z=-1\\-3x+2y=2\\3x-2y=-2\end{cases}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Ecuación 3ª + Ecuación 2ª}\\ \begin{array}{rrl}3x & -2y & =-2\\ -3x & +2y & =2\\ \hline & 0 & =0\end{array}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}3x-y-z=-1\\-3x+2y=2\\0=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}3x-y-z=-1\\-3x+2y=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-y-z=-1-3x\\2y=2+3x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-y-z=-1-3x\\ \boxed{y=\dfrac{2+3x}{2}}\end{cases}\Rightarrow-\frac{2+3x}{2}-z=-1-3x$$

$$\Rightarrow-2-3x-2z=-2-6x\Rightarrow-2z=-3x\Rightarrow\boxed{z=\frac{3x}{2}}$$

Este sistema es compatible indeterminado. Con solución $x=t;\ y=1+\dfrac{3t}{2};\ z=\dfrac{3t}{2}$

A2) Dadas las siguientes rectas:

$$r\equiv\begin{cases}2x+y-2z-1=0\\y+z+1=0\end{cases}\quad \text{y}\quad s\equiv\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{2}$$

calcula la ecuación de un plano π paralelo a la recta r y que diste de s 3 unidades. (2 puntos)

Un plano paralelo a r tiene como vector director el director de r y también debe ser paralelo a s , por lo que también tiene como vector director el de s $\vec{v_s}=(1,2,2)$.

Hallemos el vector director de r como el producto vectorial de los normales de los planos que la definen.

$$\vec{v_r}=\begin{vmatrix}i & j & k\\2 & 1 & -2\\0 & 1 & 1\end{vmatrix}=i+2k-2j+2i=3i-2j+2k=(3,-2,2)$$

El vector normal del plano π es el producto vectorial de los dos vectores directores

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v_s}=(1,2,2)\\ \vec{v_r}=(3,-2,2)\end{array}\right\}\Rightarrow\vec{n}=\begin{vmatrix}i & j & k\\1 & 2 & 2\\3 & -2 & 2\end{vmatrix}=4i+6j-2k-6k-2j+4i=8i+4j-8k=(8,4,-8)$$

El plano π tiene ecuación

$\pi\equiv 8x+4y-8z+D=0$

Como la distancia de s a π es 3 se cumple

$$d(s,\pi)=3\Rightarrow d((-2,1,1),\pi)=3\Rightarrow\frac{|-16+4-8+D|}{\sqrt{64+16+64}}=3\Rightarrow\frac{|-20+D|}{\sqrt{144}}=3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{-20+D}{12}=3\Rightarrow-20+D=36\Rightarrow D=56\\ \dfrac{-20+D}{12}=-3\Rightarrow-20+D=-36\Rightarrow D=-16\end{cases}$$

Hay dos planos solución del problema:

$\pi \equiv 8x+4y-8z+56=0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv 2x+y-2z+14=0}$

$\pi \equiv 8x+4y-8z-16=0 \Rightarrow \boxed{\pi \equiv 2x+y-2z-4=0}$

A3) Calcula la derivada de las siguientes funciones y simplifica el resultado:

$f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1-\cos 2x}{\sin 2x}}$ (1 punto)

$g(x)=\left(\dfrac{1}{x}\right)^{-x}$ (1 punto)

Simplificamos al máximo la expresión de la función antes de derivar.

$$f(x)=\ln\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}}=\ln\left(\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\cos^2 x+\sin^2 x}{2\sin x\cos x}\right)$$

$$f(x)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sin^2 x+\sin^2 x}{2\sin x\cos x}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\cancel{2}\sin^{\cancel{2}} x}{\cancel{2}\,\cancel{\sin x}\cos x}\right)=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)=\frac{1}{2}(\ln\sin x-\ln\cos x)$$

Derivamos la función $f(x)=\dfrac{1}{2}(\ln\sin x-\ln\cos x)$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{-\sin x}{\cos x}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin x\cos x}\right)=\frac{1}{2\sin x\cos x}=\frac{1}{sin2x}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{1}{sin2x}}$$

$$g(x)=\left(\frac{1}{x}\right)^{-x}=x^x \Rightarrow \ln g(x)=\ln x^x \Rightarrow \ln g(x)=x\cdot\ln x$$

Derivamos $\ln g(x)=x\cdot\ln x$

$$\frac{g'(x)}{g(x)}=\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\Rightarrow g'(x)=g(x)(\ln x+1)=x^x(1+\ln x)$$

$$\boxed{g'(x)=x^x(1+\ln x)}$$

A4) Demuestra que existe $\alpha\in(-1,3)$ tal que $f'(\alpha)=-\dfrac{1}{4}$, siendo

$$f(x)=\left[x^2+\log\left(x^2-2x+7\right)\right]^{\sqrt[3]{\frac{3-x}{4}}}$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (3 puntos)

La función $f(x)=\left[x^2+\log\left(x^2-2x+7\right)\right]^{\sqrt[3]{\frac{3-x}{4}}}$ es continua en el intervalo (–1, 3).

La expresión x^2-2x+7 es positiva en dicho intervalo, ya que se anula en los extremos del intervalo y es positiva en los valores del intervalo abierto y el logaritmo existe. De la misma manera es derivable.

Si consideramos la función $g(x) = f(x) + \frac{1}{4}x$ tenemos que esta nueva función es derivable en el intervalo (–1,3) ; $g(-1) = f(-1) - \frac{1}{4} = (1+\log 10)^1 - \frac{1}{4} = 2 - \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$ y también $g(3) = f(3) + \frac{3}{4} = (9+\log 10)^0 + \frac{3}{4} = 1 + \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$.

Utilizando el teorema de Rolle existe un valor $c \in (-1,3)$ donde $g'(c) = 0$.

Por lo que $g'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow f'(c) = -\frac{1}{4}$.

OPCIÓN B

B1) Resuelve la ecuación matricial $X \cdot A^{35} = A^{25}$ teniendo en cuenta que A es la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2 puntos)

Veamos si A es invertible

$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. La matriz A es invertible.

Calculemos sucesivas potencias de A.

$$A^1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1-1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

$$A^5 = A^4 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A^2$$

$$A^6 = A^4 \cdot A^2 = A \cdot A^2 = A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Todas las potencias de A con exponente 3 o múltiplos de 3 son igual a la matriz identidad ***I***.

$$A^3 = A^6 = \ldots = A^{24} = \ldots = A^{33} = I$$

Por lo que

$$A^{35} = A^{33} \cdot A^2 = I \cdot A^2 = A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{25} = A^{24} \cdot A = I \cdot A = A$$

La ecuación $X \cdot A^{35} = A^{25}$ se resuelve utilizando lo anterior.

$$X \cdot A^{35} = A^{25} \Rightarrow X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = A \Rightarrow X = A \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}$$

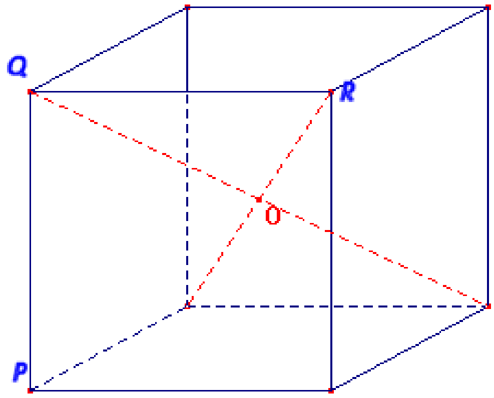
Calculamos $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{Adj\left(B^t\right)}{|B|} = \dfrac{Adj\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$X \cdot A^{35} = A^{25} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

B2) $P \equiv (1,-1,1)$, $Q \equiv (5,-3,5)$, $R \equiv (7,-7,1)$ son tres vértices de una cara de un cubo. Calcula las coordenadas del centro de dicho cubo.

(3 puntos)

Observemos el dibujo para aclararnos con lo que deseamos conseguir

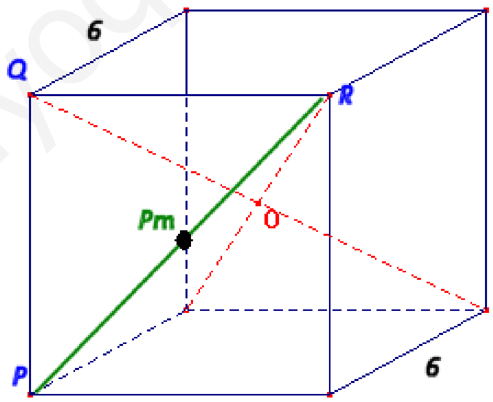


Buscamos el punto O.

Comprobamos que los puntos están dispuestos como en el dibujo. Para ello el vector $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QR}$ deben ser perpendiculares y medir lo mismo.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PQ}=(5,-3,5)-(1,-1,1)=(4,-2,4) \\ \overrightarrow{QR}=(7,-7,1)-(5,-3,5)=(2,-4,-4) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{16+4+16}=6 \\ \left|\overrightarrow{QR}\right|=\sqrt{4+16+16}=6 \\ \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{QR}=(4,-2,4)(2,-4,-4)=8+8-16=0 \end{array}\right\}$$

Es correcto el planteamiento del dibujo.



Hallamos el plano definido por los tres puntos.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PQ}=(4,-2,4) \\ \overrightarrow{QR}=(2,-4,-4) \\ \text{Pasa por P}(1,-1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ 4 & -2 & 4 \\ 2 & -4 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$8x-8+8y+8-16z+16+4z-4+16y+16+16x-16=0$$

$$24x+24y-12z+12=0$$

$$\pi : 2x+2y-z+1=0$$

El punto medio del segmento $\overline{PR}$ es $Pm = \frac{(1,-1,1)+(7,-7,1)}{2} = (4,-4,1)$.

El punto O cumple que está en la recta r perpendicular al plano π que pasa por el punto Pm y a una distancia de 3 unidades del punto Pm (3 es la mitad de la longitud de la arista del cubo).

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}_r = (2,2,-1) \\ \text{Pasa por } Pm(4,-4,1) \end{array}\right\} \Rightarrow r \equiv \left.\begin{array}{l} x = 4+2t \\ y = -4+2t \\ z = 1-t \end{array}\right\} \Rightarrow O = (4+2t,-4+2t,1-t)$$

$$\overrightarrow{PmO} = (4+2t,-4+2t,1-t)-(4,-4,1) = (2t,2t,-t)$$

$$d(Pm,O) = 3 \Rightarrow \left|\overrightarrow{PmO}\right| = 3 \Rightarrow \sqrt{4t^2+4t^2+t^2} = 3 \Rightarrow \begin{cases} 3t = 3 \Rightarrow t = 1 \\ 3t = -3 \Rightarrow t = -1 \end{cases}$$

Los posibles puntos son dos:

$$t = 1 \Rightarrow O = (4+2,-4+2,1-1) = (6,-2,0)$$
$$t = -1 \Rightarrow O' = (4-2,-4-2,1+1) = (2,-6,2)$$

Depende de hacia qué lado construyas el cubo el centro es uno de estos puntos: $O(6,-2,0)$ u $O'(2,-6,2)$

B3) Demuestra que existe $\alpha \in (1,3)$ tal que $f(\alpha) = 0$, siendo

$$f(x) = \frac{\ln\left[x-1+\sin^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right]}{4x-x^2}$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

(2 puntos)

Para poder utilizar el teorema de Bolzano a esta función en este intervalo debe cumplirse que sea continua y que cambie de signo de un extremo a otro del intervalo.

El denominador de la fracción se anula en x = 0 y x = 4, que no están incluidos en el intervalo (1,3). La expresión $x-1+\sin^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)$ es siempre positiva en el intervalo dado. Se anula cuando $x-1+\sin^2\left(\frac{\pi x}{4}\right) = 0 \Rightarrow x+\sin^2\left(\frac{\pi x}{4}\right) = 1$

Y esto es imposible con los valores comprendidos entre 1 y 3 ya que siempre son mayores que 1. El logaritmo neperiano no presenta discontinuidades en (1,3).

El requisito de la continuidad la cumple.

Veamos el signo de la función en x = 1

$$f(1) = \frac{\ln\left[1-1+\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]}{4-1^2} = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{3} = -0,23 < 0$$

Veamos el signo de la función en x = 3

$$f(1)=\frac{\ln\left[3-1+\sin^2\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]}{12-3^2}=\frac{\ln\left(2+\frac{1}{2}\right)}{3}=0,3>0$$

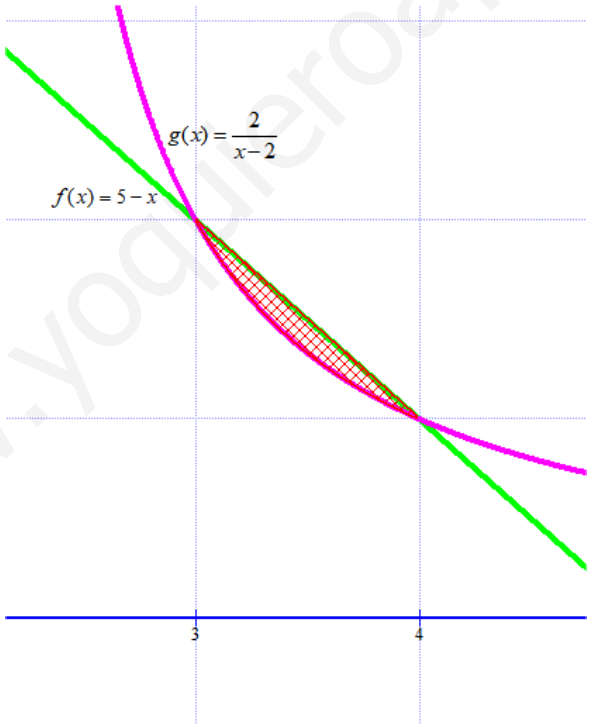
El teorema de Bolzano nos dice que si $f(x)=\frac{\ln\left[x-1+\sin^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right]}{4x-x^2}$ es continua en (1,3) y *f(1)>0*; *f(3)>0* entonces existe $c\in(1,3)$ tal que $f(c)=0$.

B4) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de las funciones $f(x)=5-x$ y $g(x)=\frac{2}{x-2}$ y calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas. (3 puntos)

$$f(x)=g(x)\Rightarrow 5-x=\frac{2}{x-2}\Rightarrow 5x-10-x^2+2x=2\Rightarrow -x^2+7x-12=0$$

$$x=\frac{-7\pm\sqrt{49-48}}{-2}=\begin{cases}=\frac{-7+1}{-2}=3\\ =\frac{-7-1}{-2}=4\end{cases}$$

Se cortan en P(3, 2) y Q(4, 1)



El área pedida es la integral definida

$$\int_3^4 5-x-\frac{2}{x-2}\,dx=\left[5x-\frac{x^2}{2}-2\ln|x-2|\right]_3^4=$$

$$=\left[5\cdot4-\frac{4^2}{2}-2\ln|4-2|\right]-\left[5\cdot3-\frac{3^2}{2}-2\ln|3-2|\right]=$$

$$=20-8-2\ln2-15+4,5=1,5-2\ln2=\boxed{0,11\,u^2}$$