Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2018-2019

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

Realiza una de las opciones, A o B

OPCIÓN A

A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a+1)x - y + (1-a)z = a+1 \\ (-a-1)x + (a+1)y + (a^2+a-2)z = -1 \\ (a+1)x - (a+1)y + (1-a^2)z = 0 \end{cases}$$

(3 puntos)

A2) Los puntos A ≡ (2, –3, 2) y B ≡ (0, 1, –2) determinan el lado desigual de un triángulo isósceles que tiene su tercer vértice en la recta de ecuación $r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-4}{-2}$. Calcula este vértice sabiendo que el área del triángulo vale 18 u^2 (2 puntos)

A3) Demuestra que existe $\alpha \in (1, e)$ tal que $f'(\alpha) = e+1$, siendo

$$f(x) = (x + ex - e)^{\frac{e}{x}}$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (2 puntos)

A4) Encuentra los tres puntos en que se cortan las gráficas de las funciones $f(x) = 1 + \cos x$ y $g(x) = \frac{-2x^2}{\pi^2} + 2$. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas. (3 puntos).

OPCIÓN B

B1) Calcula los valores del parámetro t para que se cumpla la condición $|A \cdot B| = |A + B|$, siendo A y B las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & t-1 \\ 0 & -t & t \\ t+1 & 1-t & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ t+1 & t & t+1 \\ 1 & t-1 & t+1 \end{pmatrix}$$

(2 puntos)

B2) Calcula la ecuación continua de la recta *t* sabiendo que pasa por el punto P ≡ (1,–2, -1) y que corta a las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} -x + y - z - 1 = 0 \\ 3y - 2z + 3 = 0 \end{cases} \text{ y } s \equiv \frac{x-3}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

(3 puntos)

B3) Calcula el valor del parámetro real *a* para que la siguiente función sea continua en todo R :

$$f(x) = \begin{cases} \log\left(x^2 + 9\right) & x \le 1 \\ \dfrac{\cos \frac{\pi x}{2}}{a \cdot (1-x)} & x > 1 \end{cases}$$

(2 puntos)

B4) Demuestra que la siguiente función tiene un máximo relativo en el intervalo (–1, 0) :

$$f(x) = cos(\pi x) \cdot ln\left(x^2 - 3x + 2\right)$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (3 puntos)

SOLUCIONES

OPCIÓN A

A1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a+1)x-y+(1-a)z=a+1 \\ (-a-1)x+(a+1)y+\left(a^2+a-2\right)z=-1 \\ (a+1)x-(a+1)y+\left(1-a^2\right)z=0 \end{cases}$$

(3 puntos)

La matriz de coeficientes asociada al sistema es:

$A=\begin{pmatrix} a+1 & -1 & 1-a \\ -a-1 & a+1 & a^2+a-2 \\ a+1 & -a-1 & 1-a^2 \end{pmatrix}$ con determinante

$$|A|=\begin{vmatrix} a+1 & -1 & 1-a \\ -(a+1) & a+1 & a^2+a-2 \\ a+1 & -a-1 & 1-a^2 \end{vmatrix}=(a+1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1-a \\ -1 & a+1 & a^2+a-2 \\ 1 & -a-1 & 1-a^2 \end{vmatrix}=$$

$$=(a+1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1-a \\ -1 & a+1 & (a-1)(a+2) \\ 1 & -a-1 & (1-a)(1+a) \end{vmatrix}=(a+1)(a-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & a+1 & a+2 \\ 1 & -a-1 & -(1+a) \end{vmatrix}=$$

$$=\left\{\text{Sumamos a la 3ª fila la 2ª}\right\}=(a+1)(a-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & a+1 & a+2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=(a+1)(a-1)(a+1-1)=|A|=\begin{vmatrix} a+1 & -1 & 1-a \\ -(a+1) & a+1 & a^2+a-2 \\ a+1 & -a-1 & 1-a^2 \end{vmatrix}=(a+1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1-a \\ -1 & a+1 & a^2+a-2 \\ 1 & -a-1 & 1-a^2 \end{vmatrix}=$$

$$=(a+1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1-a \\ -1 & a+1 & (a-1)(a+2) \\ 1 & -a-1 & (1-a)(1+a) \end{vmatrix}=(a+1)(a-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & a+1 & a+2 \\ 1 & -a-1 & -(1+a) \end{vmatrix}=$$

$$=\left\{\text{Sumamos a la 3ª fila la 2ª}\right\}=(a+1)(a-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & a+1 & a+2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=(a+1)(a-1)(a+1-1)=(a+1)(a-1)a$$

Si lo igualamos a cero.

$$|A|=0\Rightarrow(a+1)(a-1)a=0\Rightarrow\begin{cases} a=0 \\ a=-1 \\ a=1 \end{cases}$$

Estudiemos los cuatro casos diferentes.

CASO 1. $a \neq 0, a \neq 1 \; y \; a \neq -1$.

En este caso el rango de la matriz de los coeficientes es 3 al igual que el de la matriz ampliada e igual que el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO. Tiene una única solución.

Utilizando la regla de Cramer las soluciones son:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} a+1 & -1 & 1-a \\ -1 & a+1 & a^2+a-2 \\ 0 & -a-1 & 1-a^2 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\cancel{(a-1)}\begin{vmatrix} a+1 & -1 & -1 \\ -1 & a+1 & a+2 \\ 0 & -a-1 & -a-1 \end{vmatrix}}{(a+1)\cancel{(a-1)}a} = \frac{\begin{vmatrix} a+1 & -1 & -1 \\ -1 & a+1 & a+2 \\ 0 & -a-1 & -a-1 \end{vmatrix}}{(a+1)a}$$

$$x = \frac{\cancel{(a+1)}\begin{vmatrix} a+1 & -1 & -1 \\ -1 & a+1 & a+2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{\cancel{(a+1)}a} = \frac{\begin{vmatrix} a+1 & -1 & -1 \\ -1 & a+1 & a+2 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}}{a} = \frac{-a^2-2a-1-1+1+a^2+3a+2}{a}$$

$$\boxed{x = \frac{a+1}{a}}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a+1 & a+1 & 1-a \\ -a-1 & -1 & (a-1)(a+2) \\ a+1 & 0 & (1-a)(a+1) \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\cancel{(a+1)}\begin{vmatrix} 1 & a+1 & 1-a \\ -1 & -1 & (a-1)(a+2) \\ 1 & 0 & (1-a)(a+1) \end{vmatrix}}{\cancel{(a+1)}(a-1)a}$$

$$y = \frac{\cancel{(a-1)}\begin{vmatrix} 1 & a+1 & -1 \\ -1 & -1 & (a+2) \\ 1 & 0 & -(a+1) \end{vmatrix}}{\cancel{(a-1)}a} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & a+1 & -1 \\ -1 & -1 & (a+2) \\ 1 & 0 & -(a+1) \end{vmatrix}}{a} = \frac{a+1+a^2+3a+2-1-a^2-2a-1}{a}$$

$$\boxed{y = \frac{2a+1}{a}}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a+1 & -1 & a+1 \\ -a-1 & a+1 & -1 \\ a+1 & -a-1 & 0 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{\cancel{(a+1)}\begin{vmatrix} 1 & -1 & a+1 \\ -1 & a+1 & -1 \\ 1 & -a-1 & 0 \end{vmatrix}}{\cancel{(a+1)}(a-1)a} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & a+1 \\ -1 & a+1 & -1 \\ 1 & -a-1 & 0 \end{vmatrix}}{(a-1)a}$$

$$z = \frac{1+\cancel{a^2}+\cancel{2a}+1-\cancel{a^2}-\cancel{2a}-1-a-1}{(a-1)a} = \frac{-\cancel{a}}{(a-1)\cancel{a}} = \frac{-1}{a-1}$$

$$\boxed{z = \frac{1}{1-a}}$$

CASO 2. $a = 0$.

El sistema queda

$\begin{cases} x-y+z=1 \\ -x+y-2z=-1 \\ x-y+z=0 \end{cases}$ Este sistema es incompatible. La 1ª y la 3ª ecuación tienen igual el primer miembro y diferente el 2º.

CASO 3. $a=1$.
El sistema queda

$\begin{cases} 2x-y=2 \\ -2x+2y=-1 \\ 2x-2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-y=2 \\ 2x-2y=1 \\ 2x-2y=0 \end{cases}$ Vuelve a ser un sistema incompatible, la 2ª y 3ª ecuación no se pueden cumplir al mismo tiempo.

CASO 4. $a=-1$
El sistema queda

$$\begin{cases} -y+2z=0 \\ -2z=-1 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y+2z=0 \\ \boxed{z=\frac{1}{2}} \end{cases} \Rightarrow -y+1=0 \Rightarrow \boxed{y=1}$$

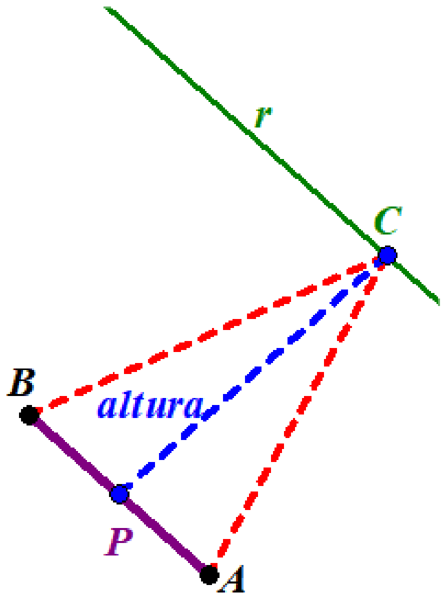
El sistema es compatible indeterminado. La solución es $x=t, \quad y=1, \quad z=0,5$.

A2) Los puntos A ≡ (2, –3, 2) y B ≡ (0, 1, –2) determinan el lado desigual de un triángulo isósceles que tiene su tercer vértice en la recta de ecuación $r \equiv \frac{x-3}{2}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z-4}{-2}$. Calcula este vértice sabiendo que el área del triángulo vale 18 u^2 (2 puntos)

La recta r tiene ecuaciones paramétricas:

$$r \equiv \begin{cases} x=3+2t \\ y=4-t \\ z=4-2t \end{cases}$$

El tercer vértice está en la recta y tiene coordenadas $C \equiv (3+2t,\ 4-t,\ 4-2t)$



El vector $\overrightarrow{AB}=(0,1,-2)-(2,-3,2)=(-2,4,-4)$.

La longitud de la base es $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{4+16+16}=\sqrt{36}=6$.

El punto medio del segmento AB es $P=\dfrac{(0,1,-2)+(2,-3,2)}{2}=\dfrac{(2,-2,0)}{2}=(1,-1,0)$.

La altura del triángulo es el módulo del vector que une P con C.

$$\left|\overrightarrow{PC}\right|=\left|(3+2t,\ 4-t,\ 4-2t)-(1,-1,0)\right|=\left|(2+2t,5-t,4-2t)\right|=\sqrt{(2+2t)^2+(5-t)^2+(4-2t)^2}$$

$$\left|\overrightarrow{PC}\right|=\sqrt{4+4t^2+8t+25+t^2-10t+16+4t^2-16t}=\sqrt{9t^2-18t+45}$$

Como el área del triángulo es 18 se cumple:

$$18=\frac{\text{Base}\cdot\text{altura}}{2}=\frac{6\cdot\sqrt{9t^2-18t+45}}{2}$$
$$36=6\cdot\sqrt{9t^2-18t+45}$$
$$6=\sqrt{9t^2-18t+45}$$
$$36=9t^2-18t+45$$
$$9t^2-18t+9=0$$
$$t^2-2t+1=0\Rightarrow t=\frac{2\pm\sqrt{4-4}}{2}=1$$

El punto C es

$$\left.\begin{array}{l} C\equiv(3+2t,\ 4-t,\ 4-2t) \\ t=1 \end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{C\equiv(5,3,2)}$$

A3) Demuestra que existe $\alpha\in(1,e)$ tal que $f\,'(\alpha)=e+1$, siendo

$$f(x)=(x+ex-e)^{\frac{e}{x}}$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (2 puntos)

La función es continua en el intervalo $[1,e]$ y derivable en $(1,e)$, siendo su derivada:

$$f(x)=(x+ex-e)^{\frac{e}{x}}\Rightarrow \ln f(x)=\ln(x+ex-e)^{\frac{e}{x}}\Rightarrow \ln f(x)=\frac{e}{x}\ln(x+ex-e)$$

Derivamos

$$\frac{f\,'(x)}{f(x)}=-\frac{e}{x^2}\ln(x+ex-e)+\frac{e}{x}\frac{1+e}{x+ex-e}$$

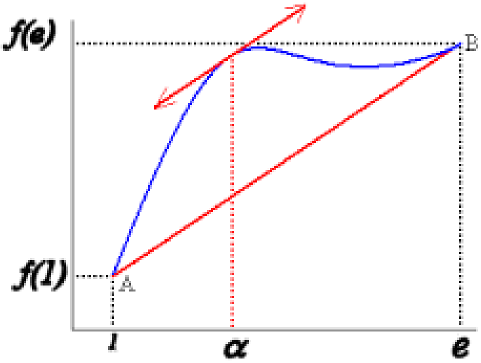
$$f\,'(x)=f(x)\left[-\frac{e}{x^2}\ln(x+ex-e)+\frac{e}{x}\frac{1+e}{x+ex-e}\right]$$

$$f\,'(x)=(x+ex-e)^{\frac{e}{x}}\left[-\frac{e}{x^2}\ln(x+ex-e)+\frac{e}{x}\frac{1+e}{x+ex-e}\right]$$

Calculamos $f(1)=(1+e-e)^{\frac{e}{1}}=1;\quad f(e)=(e+e^2-e)^{\frac{e}{e}}=e^2$

La pendiente de la recta que une el punto (1,1) con el punto (e, e^2) es

$$pendiente = \frac{e^2-1}{e-1} = \frac{\cancel{(e-1)}(e+1)}{\cancel{e-1}} = e+1$$



Según el teorema de Rolle, existe un valor $\alpha \in (1,e)$ tal que $f'(\alpha) = \dfrac{f(e)-f(1)}{e-1}$.

Es decir, existe un valor $\alpha \in (1,e)$ tal que $f'(\alpha) = \dfrac{f(e)-f(1)}{e-1} = 1+e$

A4) Encuentra los tres puntos en que se cortan las gráficas de las funciones $f(x) = 1+\cos x$ y $g(x) = \dfrac{-2x^2}{\pi^2}+2$. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas. (3 puntos).

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 1+\cos x = \frac{-2x^2}{\pi^2}+2 \Rightarrow \cos x = \frac{-2x^2}{\pi^2}+1$$

Por tanteo, comprobamos que $x=0$ cumple la ecuación, pues $\cos 0 = \dfrac{0}{\pi^2}+1$. Es cierto.

También se cumple para $x=\pi$ pues $\cos\pi = \dfrac{-2\pi^2}{\pi^2}+1 = -2+1 = -1$. Es cierto.

También se cumple para $x=-\pi$ pues $\cos(-\pi) = \dfrac{-2\pi^2}{\pi^2}+1 = -2+1 = -1$. Es cierto.

El área se calcula hallando el valor de la integral definida de la diferencia de las dos funciones entre $x=-\pi$ y $x=0$ y de la integral definida entre $x=0$ y $x=\pi$. Luego se suman sus valores absolutos.

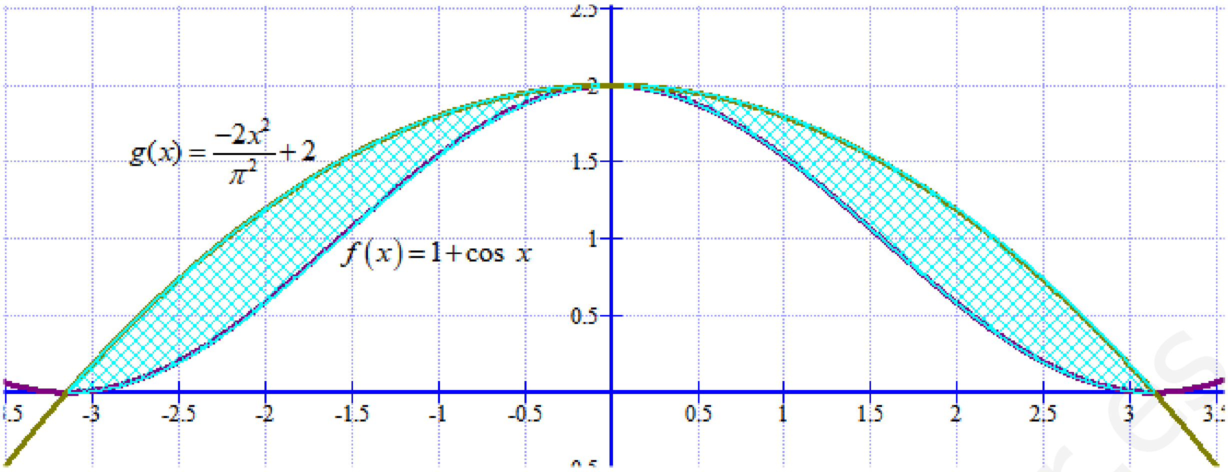
$$\int_{-\pi}^{0} 1+\cos x - \left(\frac{-2x^2}{\pi^2}+2\right)dx = \int_{-\pi}^{0} 1+\cos x + \frac{2x^2}{\pi^2} - 2dx = \int_{-\pi}^{0} \cos x + \frac{2x^2}{\pi^2} - 1dx = \left[senx + \frac{2x^3}{3\pi^2} - x \right]_{-\pi}^{0} =$$

$$= \left[sen0 + \frac{0}{3\pi^2} - 0 \right] - \left[sen(-\pi) + \frac{2(-\pi)^3}{3\pi^2} - (-\pi) \right] = \frac{2\pi^3}{3\pi^2} - \pi = \frac{2}{3}\pi - \pi = -\frac{1}{3}\pi$$

$$\int_{0}^{\pi} 1+\cos x - \left(\frac{-2x^2}{\pi^2}+2\right)dx = \int_{0}^{\pi} \cos x + \frac{2x^2}{\pi^2} - 1dx = \left[senx + \frac{2x^3}{3\pi^2} - x \right]_{0}^{\pi} =$$

$$= \left[sen\pi + \frac{2\pi^3}{3\pi^2} - \pi \right] - \left[sen0 + \frac{0}{3\pi^2} - 0 \right] = \frac{2\pi^3}{3\pi^2} - \pi = \frac{2}{3}\pi - \pi = -\frac{1}{3}\pi$$

El área de la región que nos piden calcular es $\left|-\frac{1}{3}\pi\right|+\left|-\frac{1}{3}\pi\right|=\frac{1}{3}\pi+\frac{1}{3}\pi=\boxed{\frac{2}{3}\pi}$



OPCIÓN B

B1) Calcula los valores del parámetro t para que se cumpla la condición $|A\cdot B|=|A+B|$, siendo A y B las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & t-1 \\ 0 & -t & t \\ t+1 & 1-t & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ t+1 & t & t+1 \\ 1 & t-1 & t+1 \end{pmatrix}$$

(2 puntos)

Calculemos la suma de las matrices y su producto.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & t-1 \\ 0 & -t & t \\ t+1 & 1-t & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ t+1 & t & t+1 \\ 1 & t-1 & t+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t-1 & (t-1)^2 & (t-1)(t+1) \\ -t^2-t+t & -t^2+t^2-t & -t^2-t+t^2+t \\ t^2+t+1-t^2+1 & t-t^2+t-1 & 1-t^2+t+1 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} t-1 & (t-1)^2 & (t-1)(t+1) \\ -t^2 & -t & 0 \\ t+2 & -t^2+2t-1 & -t^2+t+2 \end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & t-1 \\ 0 & -t & t \\ t+1 & 1-t & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ t+1 & t & t+1 \\ 1 & t-1 & t+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} t & 0 & t-1 \\ t+1 & 0 & 2t+1 \\ t+2 & 0 & t+2 \end{pmatrix}$$

Calculamos los determinantes del producto y de la suma.
El determinante de A+B es 0 ya que la columna segunda es todo ceros.
El determinante de A · B es:

$$|A\cdot B|=\begin{vmatrix} t-1 & (t-1)^2 & (t-1)(t+1) \\ -t^2 & -t & 0 \\ t+2 & -t^2+2t-1 & -t^2+t+2 \end{vmatrix}=\left\{\begin{matrix}\text{Saco factor común en 1ª fila } (t\text{ -1}) \\ \text{y en 2ª fila } (t)\end{matrix}\right\}=$$

$$=(t-1)t\begin{vmatrix} 1 & t-1 & t+1 \\ -t & -1 & 0 \\ t+2 & -t^2+2t-1 & -t^2+t+2 \end{vmatrix}=\left\{\text{Saco factor común en 3ª columna } (t+1)\right\}=$$

$$=(t-1)t(t+1)\begin{vmatrix} 1 & t-1 & 1 \\ -t & -1 & 0 \\ t+2 & -t^2+2t-1 & -t+2 \end{vmatrix}=(t-1)t(t+1)\left(t-2+\cancel{t^3}-2t^2+t+t+2-\cancel{t^3}+3t^2-2t\right)$$

$$|A\cdot B|=(t-1)t(t+1)\left(t^2+t\right)=(t-1)t(t+1)t(t+1)$$

Entonces

$$|A\cdot B|=|A+B|\Rightarrow (t-1)t(t+1)t(t+1)=0\Rightarrow \boxed{\begin{cases} t=1 \\ t=0 \\ t=-1 \end{cases}}$$

B2) Calcula la ecuación continua de la recta *t* sabiendo que pasa por el punto P ≡ (1,–2, –1) y que corta a las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} -x+y-z-1=0 \\ 3y-2z+3=0 \end{cases} \text{ y } s \equiv \frac{x-3}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{-1}$$

(3 puntos)

Hallemos la ecuación del plano π que contiene a la recta r y el punto P. Después la ecuación del plano π´ que contiene a la recta s y el punto P. La recta t es la definida por ambos planos.

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv a\left(-x+y-z-1\right)+b\left(3y-2z+3\right)=0 \\ P\left(1,-2,-1\right)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow a\left(-1-2+1-1\right)+b\left(-6+2+3\right)=0$$

$$-3a-b=0 \Rightarrow b=-3a$$

El plano π tiene ecuación:

$$\pi \equiv a\left(-x+y-z-1\right)-3a\left(3y-2z+3\right)=0 \Rightarrow \left(-x+y-z-1\right)-3\left(3y-2z+3\right)=0$$

$$\pi \equiv -x-8y+5z-10=0$$

El plano π´ pasa por P ≡ (1,–2, –1) y tiene como vector director $\vec{u}=\left(0,1,-1\right)$ y $\overrightarrow{AP}=\left(1,-2,-1\right)-\left(3,1,-1\right)=\left(-2,-3,0\right)$, siendo A(3,1,–1) un punto de la recta *s*.

$$\left.\begin{array}{l} P\left(1,-2,-1\right)\in\pi' \\ \vec{u}=\left(0,1,-1\right) \\ \overrightarrow{AP}=\left(-2,-3,0\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \pi' \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y+2 & z+1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 0 \end{vmatrix}=0$$

$$2y+4+2z+2-3x+3=0$$

$$\pi' \equiv -3x+2y+2z+9=0$$

La recta *t* es la definida por la intersección de los planos:

$$\left.\begin{array}{l} \pi \equiv -x-8y+5z-10=0 \\ \pi' \equiv -3x+2y+2z+9=0 \end{array}\right\}$$

Ya está resuelto el problema, pero nos tomamos la molestia de obtener su ecuación continua.

El vector director de la recta $t \equiv \left.\begin{array}{l} -x-8y+5z-10=0 \\ -3x+2y+2z+9=0 \end{array}\right\}$ es el producto vectorial de los normales de cada plano que la definen.

$$\vec{v_r}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -8 & 5 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix}=-16i-15j-2k-24k+2j-10i=-26i-13j-26k$$

$$\vec{v_r}=\left(-26,-13,-26\right)$$

Reduciendo las coordenadas del vector dividiendo por –13, podemos tomar como vector director de la recta $\vec{v_r}=\left(2,1,2\right)$

Un punto de la recta se puede tomar el punto P(1,–2,–1).

La ecuación de la recta *t* es $\boxed{\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+1}{2}}$

OTRA MANERA DE RESOLVERLO

Veamos cual es la posición relativa de las rectas r y s.

El vector director de la recta $r \equiv \begin{cases} -x+y-z-1=0 \\ 3y-2z+3=0 \end{cases}$ es el producto vectorial de los normales de cada plano que la definen.

$$\overrightarrow{v_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -2i-3k-2j+3i = i-2j-3k = (1,-2,-3)$$

Y el vector director de la recta s es $\overrightarrow{v_s} = (0,1,-1)$

¿Son paralelas o coincidentes? ¿Son las coordenadas de los vectores directores proporcionales?

$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{v_r} = (1,-2,-3) \\ \overrightarrow{v_s} = (0,1,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow ¿\frac{1}{0} = \frac{-2}{1} = \frac{-3}{-1}?$, la respuesta es que no son ciertas las igualdades y las rectas solo pueden ser secantes o se cruzan.

Averigüemos un punto de la recta r.

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} -x+y-z-1=0 \\ 3y-2z+3=0 \end{cases} \\ z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} -x+y-1=0 \\ 3y+3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x+y-1=0 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow -x-1-1=0 \Rightarrow x=-2$$

El punto de la recta r es $\mathrm{P_r} = (-2,-1,0)$

Un punto de s puede ser $\mathrm{P}_s = (3,1,-1)$

El vector $\overrightarrow{\mathrm{P_r}\,\mathrm{P}_s} = (3,1,-1)-(-2,-1,0) = (5,2,-1)$

Calculemos el producto mixto de los vectores $\overrightarrow{v_r} = (1,-2,-3)$, $\overrightarrow{v_s} = (0,1,-1)$ y $\overrightarrow{\mathrm{P_r}\,\mathrm{P}_s} = (5,2,-1)$.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -1+10+15+2 = 26 \neq 0$$

Las rectas se cruzan.

Pasamos las ecuaciones de las rectas a paramétricas y obtengamos las coordenadas de un punto cualquiera de cada una de las rectas.

La ecuación de la recta r es

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{P_r} = (-2,-1,0) \\ \overrightarrow{v_r} = (1,-2,-3) \end{array}\right\} r \equiv \begin{cases} x=-2+t \\ y=-1-2t \Rightarrow Q_r = (-2+t,-1-2t,-3t) \\ z=-3t \end{cases}$$

Y la ecuación de la recta s es

$$s \equiv \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 + t' \\ z = -1 - t' \end{cases} \Rightarrow Q_s = (3, 1+t', -1-t')$$

El vector director de la recta *t* debe pasar por un punto de *r* y otro de *s*. Por lo que los vectores $\overrightarrow{PQ_s}$ y $\overrightarrow{PQ_r}$ deben tener coordenadas proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{PQ_r} = (-2+t, -1-2t, -3t) - (1,-2,-1) = (-3+t, 1-2t, 1-3t) \\ \overrightarrow{PQ_s} = (3, 1+t', -1-t') - (1,-2,-1) = (2, 3+t', -t') \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-3+t}{2} = \frac{1-2t}{3+t'} = \frac{1-3t}{-t'}$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{-3+t}{2} = \frac{1-2t}{3+t'} \\ \frac{-3+t}{2} = \frac{1-3t}{-t'} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (-3+t)(3+t') = 2(1-2t) \\ -t'\cdot(-3+t) = 2\cdot(1-3t) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -9-3t'+3t+tt' = 2-4t \\ t' = \frac{-2+6t}{-3+t} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -3t'+tt' = 11-7t \\ t' = \frac{-2+6t}{-3+t} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} t'(-3+t) = 11-7t \\ t' = \frac{-2+6t}{-3+t} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} t' = \frac{11-7t}{-3+t} \\ t' = \frac{-2+6t}{-3+t} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{11-7t}{-3+t} = \frac{-2+6t}{-3+t} \Rightarrow 11-7t = -2+6t$$

$$-7t - 6t = -2 - 11 \Rightarrow -13t = -13 \Rightarrow t = 1$$

Para $t = 1$ el vector director de la recta *t* es

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v_t} = \overrightarrow{PQ_r} = (-3+t, 1-2t, 1-3t) \\ t = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v_t} = (-2,-1,-2)$$

La recta *t* tiene ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v_t} = (-2,-1,-2) \\ P \equiv (1,-2,\ -1) \end{array}\right\} \Rightarrow t \equiv \frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{-2}$$

B3) Calcula el valor del parámetro real *a* para que la siguiente función sea continua en todo R :

$$f(x) = \begin{cases} \log(x^2+9) & x \le 1 \\ \dfrac{\cos \frac{\pi x}{2}}{a\cdot(1-x)} & x > 1 \end{cases}$$

(2 puntos)

Para que sea continua en todo R debe de serlo en x = 1. Para ello se deben cumplir:

- Existe $f(1) = \log(1^2+9) = \log 10 = 1$
- Existe $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \log(x^2+9) = \log 10 = 1$

- Existe $\lim_{x\to 1^+} f(x) =$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{\cos\frac{\pi x}{2}}{a\cdot(1-x)} = \frac{\cos\frac{\pi}{2}}{a\cdot(1-1)} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (aplico L´Hôpital)=}$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{-\frac{\pi}{2}\text{sen}\frac{\pi x}{2}}{-a} = \frac{-\frac{\pi}{2}\text{sen}\frac{\pi}{2}}{-a} = \frac{-\frac{\pi}{2}}{-a} = \frac{\pi}{2a}$$

- Los tres valores son iguales. $\frac{\pi}{2a} = 1 \Rightarrow \pi = 2a \Rightarrow \boxed{a = \frac{\pi}{2}}$

B4) Demuestra que la siguiente función tiene un máximo relativo en el intervalo (–1, 0):

$$f(x) = cos(\pi x)\cdot ln\left(x^2 - 3x + 2\right)$$

Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (3 puntos)

La derivada de $f(x) = cos(\pi x)\cdot ln\left(x^2-3x+2\right)$ es

$$f\,'(x) = -\pi sen(\pi x)\cdot ln\left(x^2-3x+2\right) + cos(\pi x)\cdot\frac{2x-3}{x^2-3x+2}$$

Resolver la ecuación $f\,'(x) = 0 \Rightarrow -\pi sen(\pi x)\cdot ln\left(x^2-3x+2\right) + cos(\pi x)\cdot\frac{2x-3}{x^2-3x+2} = 0$

Y esta ecuación es demasiado compleja.
Acudamos al teorema de Bolzano. La función $f\,'(x)$ es continua en el intervalo (–1, 0), pues el denominador se anula en x = 1 y x = 2, que no pertenecen al intervalo.

En los extremos del intervalo (–1, 0) la derivada vale

$$f\,'(-1) = -\pi sen(-\pi)\cdot ln(1+3+2) + cos(-\pi)\cdot\frac{-2-3}{1+3+2} = -\frac{-5}{6} = \frac{5}{6} > 0$$

Y

$$f\,'(0) = -\pi sen(0)\cdot ln\left(0^2-0+2\right) + cos(0)\cdot\frac{0-3}{0^2-0+2} = \frac{-3}{2} < 0$$

Por lo tanto existe un punto donde la función $f\,'(x)$ se anula. Este sería un punto crítico de la función $f(x)$ y como la derivada pasa de positiva (crece *f(x)*) a negativa (decrece *f(x)*), entonces debe de ser un máximo relativo.