EXTRAORDINARIO DE 2018. PROBLEMA A1.

Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases}(a-3)x+(a-2)y+2z=-1\\(2a-6)x+(3a-6)y+5z=-1\\(3-a)x+(a-2)z=a^2-4a+5\end{cases}$$

(3 PUNTOS)

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}a-3 & a-2 & 2 & -1\\2(a-3) & 3(a-2) & 5 & -1\\3-a & 0 & a-2 & a^2-4a+5\end{array}\right)\overset{1}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}a-3 & a-2 & 2 & -1\\0 & a-2 & 1 & 1\\0 & a-2 & a & a^2-4a+4\end{array}\right)\overset{2}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}\mathbf{a-3} & a-2 & 2 & -1\\0 & \mathbf{a-2} & 1 & 1\\0 & 0 & \mathbf{a-1} & a^2-4a+3\end{array}\right)\overset{3}{\rightarrow}\begin{cases}a-3=0\Rightarrow a=3\\a-2=0\Rightarrow a=2\\a-1=0\Rightarrow a=1\end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si a=1, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-2 & -1 & 2 & -1\\0 & -1 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\rightarrow\begin{cases}-2x-y+2z=-1\\-y+z=1\end{cases}\overset{4}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2x=1-y+2+2y=3+y\\z=1+y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-3+2x\\z=1-3+2x=-2+2x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\alpha\\y=-3+2\alpha\\z=-2+2\alpha\end{cases}$$

2º) Si a=2, el sistema es incompatible:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 0 & 2 & -1\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 1 & -1\end{array}\right)\overset{2}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 0 & 2 & -1\\0 & 0 & 1 & 1\\0 & 0 & 0 & -2\end{array}\right)$$

3º) Si a=3, el sistema es incompatible:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & 2 & -1\\0 & 1 & 1 & 1\\0 & 0 & 2 & 0\end{array}\right)\overset{5}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & 2 & -1\\0 & 0 & -1 & 2\\0 & 0 & 2 & 0\end{array}\right)\overset{6}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & 2 & -1\\0 & 0 & -1 & 2\\0 & 0 & 0 & 4\end{array}\right)$$

4º) En los demás casos el sistema es compatible determinado:[7]

$$\left.\begin{array}{r}(a-3)x+(a-2)y+2z=-1\\(a-2)y+z=1\\(a-1)z=(a-1)(a-3)\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{z=a-3}\Rightarrow(a-2)y=1-z=1-a+3=4-a\Rightarrow\boxed{y=\frac{4-a}{a-2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(a-3)x=-1-(a-2)y-2z=-1-(a-2)\cdot\frac{4-a}{a-2}-2(a-3)=-1-4+a-2a+6=1-a\Rightarrow\boxed{x=\frac{1-a}{a-3}}$$

---

1 $2^af-2\cdot1^af$; 3^af+1^af.
2 3^af-2^af.
3 Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que despejaremos luego (caso 4º).
4 Despejamos z en la segunda ecuación y la sustituimos en la primera.
5 2^af-1^af.
6 $3^af+2\cdot2^af$.
7 En los cálculos anteriores hemos comprobado que las raíces del polinomio a^2-4a+5 son a=1 y a=3.

EXTRAORDINARIO DE 2018. PROBLEMA A2.

Halla el simétrico del punto P(2,5,2) respecto de la recta

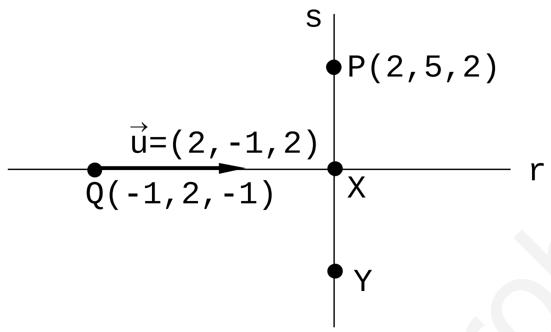
$$r\equiv\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{2}$$

(2 PUNTOS)

Obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta r:

$$r\equiv\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+1}{2}=\alpha\ \Rightarrow\ \begin{cases}x=-1+2\alpha\\y=2-\alpha\\z=-1+2\alpha\end{cases}$$

De la recta r conocemos, pues, un punto, Q(-1,2,-1), y un vector direccional, $\vec{u}(2,-1,2)$:



Si el punto X es la proyección de P sobre r, como X está en la recta r, $X(-1+2\alpha,2-\alpha,-1+2\alpha)$.

Como las rectas r y s son perpendiculares, sus vectores direccionales son ortogonales:

$$\vec{u}\cdot\overrightarrow{PX}=0\ \Rightarrow\ (2,-1,2)\cdot(2\alpha-3,-\alpha-3,2\alpha-3)=0\ \Rightarrow\ 4\alpha-6+\alpha+3+4\alpha-6=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 9\alpha-9=0\ \Rightarrow\ \alpha=1\ \Rightarrow\ X(1,1,1)$$

Si Y(x,y,z), como X es el punto medio del segmento PY:

$$\frac{2+x}{2}=1,\ \frac{5+y}{2}=1,\ \frac{2+z}{2}=1\ \Rightarrow\ x=0,\ y=-3,\ z=0\ \Rightarrow\ Y(0,-3,0)$$

EXTRAORDINARIO DE 2018. PROBLEMA A3.

Dada la función f, demuestra que existe $\alpha\in(0,2)$ tal que $f'(\alpha)=1$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso:

$$f(x)=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi+\pi x}{2}\right)\cdot\cos\frac{\pi x}{2}\cdot\ln(2e^x+2x-x^2)$$ (2 PUNTOS)

Por la fórmula del seno de la suma de dos ángulos:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi+\pi x}{2}\right)=\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi x}{2}\right)=\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)+\cos\frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

Por tanto:

$$f(x)=\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cdot\ln(2e^x+2x-x^2)$$

Derivamos la función:

$$f'(x)=-\frac{\pi}{2}\cdot 2\cdot\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cdot\ln(2e^x+2x-x^2)+\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cdot\frac{2e^x+2-2x}{2e^x+2x-x^2}\overset{1}{=}$$

$$=-\frac{\pi}{2}\cdot\operatorname{sen}(\pi x)\cdot\ln(2e^x+2x-x^2)+\cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cdot\frac{2e^x+2-2x}{2e^x+2x-x^2}$$

Ahora bien: $0<e^x \overset{2}{\Rightarrow} 0<2e^x \overset{3}{\Rightarrow} 2x-x^2<2e^x+2x-x^2 \Rightarrow x(2-x)<2e^x+2x-x^2$.

Como $x(2-x)$ es positivo en el intervalo $(0,2)$ y nulo en los extremos de ese intervalo, $2e^x+2x-x^2$ es positivo en $[0,2]$.

Por tanto, $[0,2]\subset Dom(f)=Dom(f')$.

* * *

Como f satisface las condiciones del teorema de Lagrange en el intervalo cerrado $[0,2]$, existe α en el intervalo abierto $(0,2)$ tal que:

$$f'(\alpha)=\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{\ln(2\cdot e^2)-\ln 2}{2}\overset{4}{=}\frac{\ln 2+2-\ln 2}{2}=\frac{2}{2}=1$$

En efecto:

1ª) f es continua en $[0,2]$ por ser derivable en $[0,2]$.

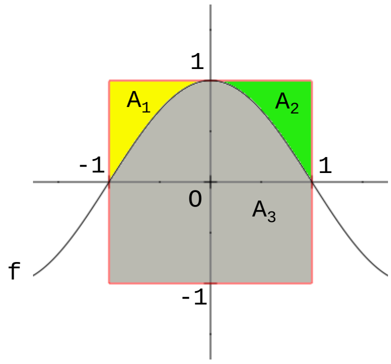
2ª) f es derivable en $(0,2)$ por serlo en $[0,2]$.

1 $2\cdot\operatorname{sen}a\cdot\cos a=\operatorname{sen}(2a)$.
2 Multiplicamos los dos miembros de la desigualdad por 2.
3 Sumamos a los dos miembros de la desigualdad $2x-x^2$.
4 Por las propiedades de los logaritmos.

EXTRAORDINARIO DE 2018. PROBLEMA A4.

La gráfica de la función $f(x)=\cos\frac{\pi x}{2}$ divide al cuadrado de centro (0,0) y lado 2 en tres regiones. Calcula el área de cada una de ellas. (3 PUNTOS)

Primero dibujamos el cuadrado y la gráfica de la función:



$$A_1=\int_{-1}^{0}\left[1-\cos\frac{\pi x}{2}\right]\cdot dx=\left[x-\frac{2}{\pi}\cdot \mathrm{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]_{-1}^{0}=\left[\left(0-\frac{2}{\pi}\cdot 0\right)-\left(-1-\frac{2}{\pi}\cdot(-1)\right)\right]=1-\frac{2}{\pi}=\frac{\pi-2}{\pi}$$

Por tanto, como f es par:

$$A_2=A_1$$

$$A_3=4-2\cdot A_1=4-\frac{2\pi-4}{\pi}=\frac{2\pi+4}{\pi}$$

EXTRAORDINARIO DE 2018. PROBLEMA B1.

Calcula el valor del parámetro t para que se cumpla la igualdad $|A^{-1}| = -1$, siendo A la siguiente matriz

$$A=\begin{pmatrix} t & 2 & t+2 \\ -t & t & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ (2 puntos)

El determinante del producto de dos matrices cuadradas es igual al producto de los determinantes de las matrices factores:

$$A\cdot A^{-1}=I \Rightarrow |A\cdot A^{-1}|=|I| \Rightarrow |A|\cdot|A^{-1}|=1 \Rightarrow |A|=\frac{1}{|A^{-1}|}=\frac{1}{-1}=-1$$

$$|A|=\begin{vmatrix} t & 2 & t+2 \\ -t & t & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{1}{=} \begin{vmatrix} t & 2 & t+2 \\ 0 & t+2 & t+2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \overset{2}{=} t\cdot\begin{vmatrix} t+2 & t+2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = t(t+2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = t(t+2)$$

Por tanto:

$$t^2+2t=-1 \Rightarrow t^2+2t+1=0 \Rightarrow (t+1)^2=0 \Rightarrow t=-1$$

[1] 2ªf+1ªf.

[2] Desarrollamos el determinante por los elementos de la primera columna.

EXTRAORDINARIO DE 2018. PROBLEMA B2.

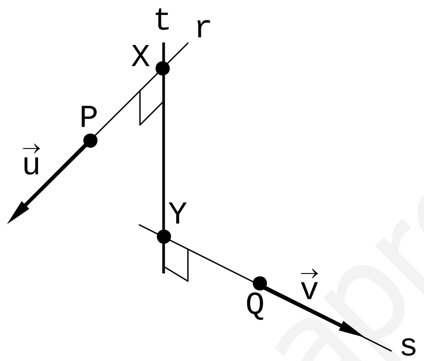
Encuentra la ecuación continua de la recta r que corta perpendicularmente a las rectas:

$$r\equiv\begin{cases}x+y+z-3=0\\2x+z-5=0\end{cases}\qquad s\equiv\frac{x-2}{-2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-1}{1}$$

(3 PUNTOS)

Calculamos primero las ecuaciones paramétricas y las determinaciones lineales de las rectas:

- $r\equiv\begin{cases}x+y+z-3=0\\2x+z-5=0\end{cases}\overset{1}{\Rightarrow}\begin{cases}x+y+5-2x=3\\z=5-2x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-2+x\\z=5-2x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\alpha\\y=-2+\alpha\\z=5-2\alpha\end{cases}\rightarrow\begin{cases}P(0,-2,5)\\\vec{u}(1,1,-2)\end{cases}$
- $s\equiv\frac{x-2}{-2}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-1}{1}=\beta\Rightarrow\begin{cases}x=2-2\beta\\y=-3+\beta\\z=1+\beta\end{cases}\rightarrow\begin{cases}Q(2,-3,1)\\\vec{v}(-2,1,1)\end{cases}$



Por estar el punto X en la recta r: $X(\alpha,-2+\alpha,5-2\alpha)$.

Por estar el punto Y en la recta s: $Y(2-2\beta,-3+\beta,1+\beta)$.

Por tanto: $[\overrightarrow{XY}]=(2-2\beta-\alpha,-1+\beta-\alpha,-4+\beta+2\alpha)$.

Como $[\overrightarrow{XY}]$ es perpendicular a $\vec{u}(1,1,-2)$ y a $\vec{v}(-2,1,1)$:

$$\begin{cases}[\overrightarrow{XY}]\cdot\vec{u}=0\\[\overrightarrow{XY}]\cdot\vec{v}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2-2\beta-\alpha-1+\beta-\alpha+8-2\beta-4\alpha=0\\-4+4\beta+2\alpha-1+\beta-\alpha-4+\beta+2\alpha=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6\alpha+3\beta=9\\3\alpha+6\beta=9\end{cases}\overset{2}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}-9\beta=-9\\3\alpha+6\beta=9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\beta=1\\\alpha=1\end{cases}\overset{3}{\Rightarrow}\begin{cases}X(1,-1,3)\\Y(0,-2,2)\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow[\overrightarrow{XY}]=(-1,-1,-1)\Rightarrow t\equiv\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-3}{1}$$

---

1 Despejamos z en la segunda ecuación y sustituimos en la primera.

2 A la primera ecuación le resto 2 veces la segunda.

3 Si los puntos X e Y coinciden, eso significa que las rectas r y s se cortan en dicho punto. En ese caso, la recta buscada pasa por ese punto y tiene por vector direccional el producto vectorial de los vectores direccionales de las rectas r y s. Si el sistema es compatible indeterminado, se trata de dos rectas paralelas (los vectores direccionales de r y s te habrán salido colineales), y entonces hay infinitas soluciones.

EXTRAORDINARIO DE 2018. PROBLEMA B3.

Calcula las siguientes integrales indefinidas:

$$\int \frac{x+1}{x^2+3x-4}\cdot dx \quad \text{y} \quad \int \frac{e^x}{1+2e^x+e^{2x}}\cdot dx$$ (2 PUNTOS)

PRIMERA INTEGRAL:

Calculamos las raíces del denominador:

$$x^2+3x-4=0 \Rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{2}=\frac{-3\pm5}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-4 \end{cases}$$

Por tanto:

$$\frac{x+1}{x^2+3x-4}=\frac{x+1}{(x-1)(x+4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+4}=\frac{A(x+4)+B(x-1)}{x^2+3x-4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+1=A(x+4)+B(x-1) \Rightarrow \begin{cases} \text{Si } x=1 \Rightarrow 2=5A \Rightarrow A=2/5 \\ \text{Si } x=-4 \Rightarrow -3=-5B \Rightarrow B=3/5 \end{cases}$$

En consecuencia:

$$\int \frac{x+1}{x^2+3x-4}\cdot dx=\int \frac{2/5}{x-1}\cdot dx+\int \frac{3/5}{x+4}\cdot dx=\frac{2}{5}\cdot\int \frac{1}{x-1}\cdot dx+\frac{3}{5}\cdot\int \frac{1}{x+4}\cdot dx \stackrel{1}{=}$$

$$=\frac{2}{5}\cdot\ln|x-1|+\frac{3}{5}\cdot\ln|x+4|+C$$

Comprobación:

$$\left[\frac{2}{5}\cdot\ln|x-1|+\frac{3}{5}\cdot\ln|x+4|\right]'=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{x-1}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{x+4}=\frac{2}{5(x-1)}+\frac{3}{5(x+4)}=\frac{2x+8+3x-3}{5(x-1)(x+4)}=$$

$$=\frac{5x+5}{5(x-1)(x+4)}=\frac{5(x+1)}{5(x-1)(x+4)}=\frac{x+1}{x^2+3x-4}$$

SEGUNDA INTEGRAL:

$$\int \frac{e^x}{1+2e^x+e^{2x}}\cdot dx=\int \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\cdot dx \stackrel{2}{=} \int \frac{1}{t^2}\cdot dt=\int t^{-2}\cdot dt=\frac{t^{-2+1}}{-2+1}+C=\frac{-1}{t}+C \stackrel{3}{=} \frac{-1}{1+e^x}+C$$

Comprobación:

$$\left[\frac{-1}{1+e^x}\right]'=\frac{e^x}{(1+e^x)^2}=\frac{e^x}{1+2e^x+e^{2x}}$$

[1] Las dos integrales son casi inmediatas de tipo logarítmico.
[2] Hacemos el cambio $1+e^x=t \Rightarrow e^x\cdot dx=dt$.
[3] Deshacemos el cambio.

Extraordinario de 2018. Problema B4.

Halla los extremos relativos y los puntos de inflexión de la función

$$f(x)=x^4-x^2$$

(3 Puntos)

Extremos relativos:

1º) Derivamos la función:

$$f'(x)=4x^3-2x=4x\left(x^2-\frac{1}{2}\right)=4x\left(x-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

2º) Estudiamos el signo de la derivada:

	$-1/\sqrt{2}$		0		$1/\sqrt{2}$	
-		+		-		+
↘		↗		↘		↗

3º) Por el criterio de la variación del signo de la primera derivada:

- En $x=-1/\sqrt{2}$ la función tiene un mínimo relativo que vale $y=-1/4$.
- En $x=0$ la función tiene un máximo relativo que vale $y=0$.
- En $x=1/\sqrt{2}$ la función tiene un mínimo relativo que vale $y=-1/4$.

Puntos de inflexión:

1º) Calculamos la derivada segunda de f:

$$f''(x)=12x^2-2=12\left(x^2-\frac{1}{6}\right)=12\left(x-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)\left(x+\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

2º) Estudiamos el signo de la segunda derivada:

	$-1/\sqrt{6}$		$1/\sqrt{6}$	
+		-		+

3º) Por el criterio de la variación del signo de la segunda derivada:

- En $x=-1/\sqrt{6}$ la función tiene un p. de i. que vale $y=-5/36$.
- En $x=1/\sqrt{6}$ la función tiene un p. de i. que vale $y=-5/36$.