

JUNIO DE 2018. PROBLEMA A1.

Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ x+(a+4)y+(a+1)z=0 \\ -(a+2)y+(a^2+3a+2)z=a+4 \end{cases} \quad (3 \text{ PUNTOS})$$

Aplicamos el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 1 & a+4 & a+1 & | & 0 \\ 0 & -(a+2) & a^2+3a+2 & | & a+4 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & a+2 & a+1 & | & -1 \\ 0 & -(a+2) & a^2+3a+2 & | & a+4 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & a+2 & a+1 & | & -1 \\ 0 & 0 & a^2+4a+3 & | & a+3 \end{pmatrix} \xrightarrow{3}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a+2=0 \Rightarrow a=-2 \\ a^2+4a+3=0 \Rightarrow a=\frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{-4\pm 2}{2}=\begin{cases} a=-1 \\ a=-3 \end{cases} \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si $a=-3$, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & -1 & -2 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x+2y=1 \\ -y-2z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-2y=1-2+4z=-1+4z \\ y=1-2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1+4\alpha \\ y=1-2\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$$

2º) Si $a=-2$, el sistema es incompatible:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & -1 & | & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 2 \end{pmatrix}$$

3º) Si $a=-1$, el sistema es incompatible:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 2 \end{pmatrix}$$

4º) En los demás casos el sistema es compatible determinado:

$$\begin{cases} x+2y=1 \\ (a+2)y+(a+1)z=-1 \\ (a+3)(a+1)z=a+3 \end{cases} \Rightarrow z=\frac{a+3}{(a+3)(a+1)} \Rightarrow \boxed{z=\frac{1}{a+1}} \Rightarrow (a+2)y=-1-(a+1)z =$$

$$= -1-(a+1)\cdot\frac{1}{a+1}=-1-1=-2 \Rightarrow \boxed{y=\frac{-2}{a+2}} \Rightarrow x=1-2y=1-2\cdot\frac{-2}{a+2}=1+\frac{4}{a+2}=$$

$$=\frac{a+2+4}{a+2} \Rightarrow \boxed{x=\frac{a+6}{a+2}}$$

¹ 2^af-1^af .

² 3^af+2^af .

³ Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que despejaremos luego (caso 4º).

⁴ 3^af-2^af .

JUNIO DE 2018. PROBLEMA A2.

Sean los puntos $P(7,4,2)$, $Q(1,2,-2)$ y $R(2,1,-3)$. Uno de ellos es el centro de un rombo, y los otros dos, dos vértices. Halla los otros dos vértices restantes. (2 PUNTOS)

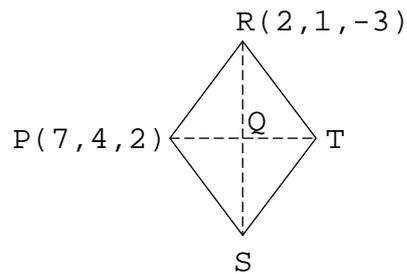
Calculamos los vectores:

$$[\vec{PQ}] = (-6, -2, -4), [\vec{PR}] = (-5, -3, -5) \text{ y } [\vec{QR}] = (1, -1, -1)$$

Es fácil ver que $[\vec{PQ}]$ y $[\vec{QR}]$ son ortogonales:

$$[\vec{PQ}] \cdot [\vec{QR}] = -6 + 2 + 4 = 0$$

Por tanto, Q es el centro del rombo:



Si $S(x,y,z)$, como $Q(1,2,-2)$ es el punto medio del segmento RS:

$$\frac{2+x}{2} = 1, \frac{1+y}{2} = 2, \frac{-3+z}{2} = -2 \Rightarrow x=0, y=3, z=-1 \Rightarrow S(0,3,-1)$$

Si $T(x,y,z)$, como $Q(1,2,-2)$ es el punto medio del segmento PT:

$$\frac{7+x}{2} = 1, \frac{4+y}{2} = 2, \frac{2+z}{2} = -2 \Rightarrow x=-5, y=0, z=-6 \Rightarrow T(-5,0,-6)$$

JUNIO DE 2018. PROBLEMA A3.

Calcula las siguientes integrales indefinidas:

$$\int e^{\cos(3x)} \cdot \operatorname{sen}(3x) \cdot dx$$

$$\int \frac{\operatorname{sen}(2x)}{1+\cos^2(2x)} \cdot dx$$

(2 PUNTOS)

a)

$$\int e^{\cos(3x)} \cdot \operatorname{sen}(3x) \cdot dx \stackrel{1}{=} -\frac{1}{3} \cdot \int e^t \cdot dt \stackrel{2}{=} -\frac{1}{3} \cdot e^t + C \stackrel{3}{=} -\frac{1}{3} \cdot e^{\cos(3x)} + C$$

Comprobación:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{3} \cdot e^{\cos(3x)}\right)' &= -\frac{1}{3} \cdot e^{\cos(3x)} \cdot (\cos(3x))' = -\frac{1}{3} \cdot e^{\cos(3x)} \cdot (-3 \cdot \operatorname{sen}(3x)) = \\ &= e^{\cos(3x)} \cdot \operatorname{sen}(3x) \end{aligned}$$

b)

$$\int \frac{\operatorname{sen}(2x)}{1+\cos^2(2x)} \cdot dx \stackrel{4}{=} -\frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{1+t^2} \cdot dt \stackrel{5}{=} -\frac{1}{2} \cdot \operatorname{arc\,tg} t + C \stackrel{2}{=} -\frac{1}{2} \cdot \operatorname{arc\,tg} \cos(2x) + C$$

Comprobación:

$$\begin{aligned} \left(-\frac{1}{2} \cdot \operatorname{arc\,tg} \cos(2x)\right)' &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\cos^2(2x)} \cdot (\cos(2x))' = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+\cos^2(2x)} \cdot (-2 \cdot \operatorname{sen}(2x)) = \frac{\operatorname{sen}(2x)}{1+\cos^2(2x)} \end{aligned}$$

¹ Hacemos el cambio de variable $\cos(3x)=t \Rightarrow -3 \cdot \operatorname{sen}(3x) \cdot dx = dt$.

² La integral es inmediata de tipo exponencial.

³ Deshacemos el cambio.

⁴ Hacemos el cambio $\cos(2x)=t \Rightarrow -2 \cdot \operatorname{sen}(2x) \cdot dx = dt$.

⁵ La integral es inmediata de tipo arco tangente.

JUNIO DE 2018. PROBLEMA A4.

Halla las asíntotas (no es necesario hacer el estudio de la posición de la curva respecto a ellas) y los extremos relativos de la función $f(x) = \frac{2x^2+6}{x-1}$. (3 PUNTOS)

ASÍNTOTAS:

■ La recta $x=1$ es una asíntota vertical:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{2x^2+6}{x-1} = \frac{8}{0^+} = +\infty; \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \frac{2x^2+6}{x-1} = \frac{8}{0^-} = -\infty$$

■ La recta $y=2x+2$ es asíntota oblicua de la función en $+\infty$ y en $-\infty$. Para verlo, se puede seguir uno de los dos métodos siguientes:

PRIMER MÉTODO:

- $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2+6}{x-1} \stackrel{1}{=} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (2x) = \pm\infty$
- $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2+6}{x^2-x} \stackrel{2}{=} \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2 = 2$
- $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x^2+6}{x-1} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2+6-2x^2+2x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x+6}{x-1} \stackrel{3}{=} \\ = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2 = 2$

SEGUNDO MÉTODO:

Como se trata de una función racional (cociente de polinomios), puede hallarse la asíntota oblicua del siguiente modo:

$$\begin{array}{r} 2x^2+6 \quad | \quad x-1 \\ -2x^2+2x \quad | \quad 2x+2 \\ \hline 2x+6 \\ -2x+2 \\ \hline 8 \end{array}$$

$$f(x) = \frac{2x^2+6}{x-1} \stackrel{4}{=} 2x+2 + \frac{8}{x-1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (2x+2)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{8}{x-1} = \frac{8}{\pm\infty} = 0$$

EXTREMOS RELATIVOS:

1º) Derivamos la función:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{2x^2+6}{x-1} &\Rightarrow f'(x) = \frac{4x(x-1) - (2x^2+6)}{(x-1)^2} = \\ &= \frac{4x^2 - 4x - 2x^2 - 6}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 4x - 6}{(x-1)^2} \stackrel{5}{=} \frac{2(x+1)(x-3)}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

¹ $2x^2+6 \sim 2x^2$ y $x-1 \sim x$ en $+\infty$ y en $-\infty$.

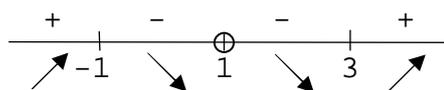
² $2x^2+6 \sim x^2$ y $x^2-x \sim x^2$ en $+\infty$ y en $-\infty$.

³ $2x+6 \sim 2x$ y $x-1 \sim x$ en $+\infty$ y en $-\infty$.

⁴ Ya que el dividendo es igual al divisor por el cociente más el resto.

⁵ Hemos calculado las raíces del numerador y lo hemos descompuesto en factores.

2º) Estudiamos el signo de la derivada:



3º) Por el criterio de la variación del signo de la primera derivada:

- En $x=-1$ la función tiene un máximo relativo que vale $y=-4$.
- En $x=3$ la función tiene un mínimo relativo que vale $y=12$.

www.yoquieroaprobar.es

JUNIO DE 2018. PROBLEMA B1.

Dada la matriz A tal que $|A|=-1$, calcula el determinante de la matriz $A^2 \cdot B^t$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} x & y & z \\ 2a-x & 2b-y & 2c-z \\ a+1 & b-1 & c-2 \end{pmatrix} \quad (2 \text{ puntos})$$

Calculamos el determinante de la matriz $A^2 \cdot B^t$:

$$\begin{aligned} |A^2 \cdot B^t| &\stackrel{1}{=} |A^2| \cdot |B^t| \stackrel{2}{=} |A|^2 \cdot |B| = (-1)^2 \cdot |B| = |B| = \\ &= \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2a-x & 2b-y & 2c-z \\ a+1 & b-1 & c-2 \end{vmatrix} \stackrel{3}{=} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2a & 2b & 2c \\ a+1 & b-1 & c-2 \end{vmatrix} \stackrel{4}{=} 2 \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ a+1 & b-1 & c-2 \end{vmatrix} \stackrel{5}{=} \\ &= 2 \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} \stackrel{6}{=} -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} \stackrel{7}{=} 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2 \cdot |A| = -2 \end{aligned}$$

¹ El determinante de un producto de dos matrices cuadradas es el producto de los determinantes de las matrices factores.

² Para calcular el determinante de A^2 aplicamos lo dicho en la nota anterior. Para calcular B^t recordemos que el determinante de una matriz cuadrada coincide con el determinante de su traspuesta.

³ $2^a f + 1^a f$.

⁴ Dividimos la segunda fila por 2 y multiplicamos al determinante por 2.

⁵ $3^a f - 2^a f$.

⁶ Al cambiar entre sí la primera fila y la última, el determinante cambia de signo.

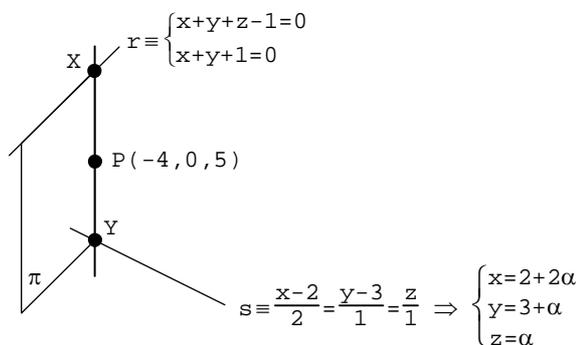
⁷ Al multiplicar la primera fila por -1, el determinante cambia de signo.

JUNIO DE 2018. PROBLEMA B2.

Halla la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P(-4,0,5)$ y corta a las rectas

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ x+y+1=0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1} \quad (3 \text{ PUNTOS})$$

Sean X e Y los puntos de corte de la recta buscada con r y s , respectivamente:¹



El punto P y la recta r determinan el plano π . Como este plano pertenece al haz de planos de arista la recta r , tiene por ecuación:²

$$\pi \equiv a(x+y+z-1) + b(x+y+1) = 0$$

Como el punto $P(-4,0,5)$ está en el plano π , satisface su ecuación:

$$a(-4+0+5-1) + b(-4+0+1) = 0 \Rightarrow -3b = 0 \Rightarrow b = 0$$

Por tanto:

$$\pi \equiv x+y+z-1=0$$

Como el punto Y está en la recta s :

$$Y(2+2\alpha, 3+\alpha, \alpha)$$

Como el punto Y está en el plano π , satisface su ecuación:

$$2+2\alpha+3+\alpha+\alpha-1=0 \Rightarrow 4\alpha+4=0 \Rightarrow 4\alpha=-4 \Rightarrow \alpha=-1 \Rightarrow \\ \Rightarrow Y(0, 2, -1) \Rightarrow [\vec{PY}] = (4, 2, -6) \Rightarrow XY \equiv \frac{x+4}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{-3}$$

¹ Otras formas de hacer este ejercicio pueden verse, por ejemplo, en el problema B2 del examen de selectividad de junio de 2007.

² Otra forma de obtener la ecuación de este plano consiste en hallar un punto y un vector direccional de la recta r .

JUNIO DE 2018. PROBLEMA B3.

Demuestra que existe $\alpha \in (2,3)$ tal que $f(\alpha) = -3/2$, siendo $f(x) = \cos(\pi x) \cdot \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 - 1}$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (2 Puntos)

PRIMER MÉTODO:

Como la función f cumple las condiciones de la **propiedad de Darboux**, existe α en $(2,3)$ tal que $f(\alpha) = -3/2$.

En efecto:

1ª) $f(3) < -3/2 < f(2)$:

- $f(2) = \cos(2\pi) \cdot (-1) = -1$.
- $f(3) = \cos(3\pi) \cdot 2 = -2$.

2ª) f es continua en $[2,3]$:

- $[2,3] \subset \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
- Si $a \in [2,3]$:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\cos(\pi x) \cdot \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 - 1} \right) = \cos(\pi a) \cdot \sqrt[3]{a^3 - 2a^2 - 1} = f(a)$$

SEGUNDO MÉTODO:

Como la función¹ $g(x) = f(x) + 3/2$ cumple las condiciones del **teorema de Bolzano**, existe α en $(2,3)$ tal que $g(\alpha) = 0$. Ahora bien:

$$g(\alpha) = 0 \Rightarrow f(\alpha) + 3/2 = 0 \Rightarrow f(\alpha) = -3/2$$

En efecto:

1ª) $g(2) \cdot g(3) < 0$:

- $g(2) = -1 + 3/2 = 1/2 > 0$
- $g(3) = -2 + 3/2 = -1/2 < 0$

2ª) g es continua en $[2,3]$:

- $[2,3] \subset \text{Dom}(g) = \text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.
- Si $a \in [2,3]$:

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left[\cos(\pi x) \cdot \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 - 1} + \frac{3}{2} \right] = \cos(\pi a) \cdot \sqrt[3]{a^3 - 2a^2 - 1} + \frac{3}{2} = g(a)$$

¹ Si hay que probar que existe α tal que $f(\alpha) = -3/2$, es decir, tal que $f(\alpha) + 3/2 = 0$, hay que considerar una función que se anule en $x = \alpha$. Esa función es $g(x) = f(x) + 3/2$.

JUNIO DE 2018. PROBLEMA B4.

Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de las funciones f y g . Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas:

$$f(x) = -x^2 + 3x \qquad g(x) = \begin{cases} x/2 & \text{si } x \leq 2 \\ 3-x & \text{si } x > 2 \end{cases} \qquad (3 \text{ Puntos})$$

1º) Resolvemos el sistema que forman las funciones que limitan por arriba y por abajo el recinto cuya área queremos hallar:

• Si $x \leq 2$:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 3x \\ y = x/2 \end{cases} \Rightarrow -x^2 + 3x = \frac{x}{2} \Rightarrow -2x^2 + 6x = x \Rightarrow 2x^2 - 5x = 0 \Rightarrow x(2x - 5) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 5/2 \end{cases}$$

• Si $x > 2$:

$$\begin{cases} y = -x^2 + 3x \\ y = 3 - x \end{cases} \Rightarrow -x^2 + 3x = 3 - x \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Por tanto, los puntos de corte son $x = 0$ ($0 \leq 2$) y $x = 3$ ($3 > 2$).

2º) Averiguamos entre 0 y 2 y entre 2 y 3 qué función está por encima y qué función está por debajo:

x	f(x)	g(x)
1	2	1/2
5/2	5/4	1/2

3º) Calculamos el área:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 (-x^2 + 3x - x/2) \cdot dx + \int_2^3 (-x^2 + 3x - 3 + x) \cdot dx = \\ &= \int_0^2 \left(-x^2 + \frac{5}{2} \cdot x\right) \cdot dx + \int_2^3 (-x^2 + 4x - 3) \cdot dx = \\ &= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5}{2} \cdot \frac{x^2}{2}\right]_0^2 + \left[-\frac{x^3}{3} + 4 \cdot \frac{x^2}{2} - 3x\right]_2^3 = \\ &= \left[\left(-\frac{8}{3} + 5\right) - 0\right] + \left[(-9 + 18 - 9) - \left(-\frac{8}{3} + 8 - 6\right)\right] = \frac{7}{3} + 0 + \frac{2}{3} = 3 \end{aligned}$$

