JUNIO DE 2017. PROBLEMA A1.

Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} x+(a-1)y+z=-1 \\ (a-1)y+2z=-2 \\ x+(a^2-5a+5)z=-a+4 \end{cases}$$

(3 PUNTOS)

Aplicamos el método de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & a^2-5a+5 & -a+4 \end{array}\right) \overset{1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a-1 & 2 & -2 \\ 0 & -a+1 & a^2-5a+4 & -a+5 \end{array}\right) \overset{2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} \mathbf{1} & a-1 & 1 & -1 \\ 0 & \mathbf{a-1} & 2 & -2 \\ 0 & 0 & \mathbf{a^2-5a+6} & -a+3 \end{array}\right) \overset{3}{\rightarrow}$$

$$\rightarrow \begin{cases} a-1=0 \Rightarrow a=1 \\ a^2-5a+6=0 \Rightarrow a=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{2}=\frac{5\pm1}{2}=\begin{cases} a=2 \\ a=3 \end{cases} \end{cases}$$

Estudiamos los distintos casos:

1º) Si a=1, el sistema es incompatible:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \overset{4}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

2º) Si a=2, el sistema es incompatible:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

3º) Si a=3, el sistema es compatible indeterminado y la solución depende de un parámetro:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{cases} x+2y+z=-1 \\ 2y+2z=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1-2y-z=-1+2+2z-z=1+z \\ y=-1-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1+\alpha \\ y=-1-\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$$

4º) En los demás casos el sistema es compatible determinado:

$$\left.\begin{array}{r} x+(a-1)y+z=-1 \\ (a-1)y+2z=-2 \\ (a-2)(a-3)z=-(a-3) \end{array}\right\} \Rightarrow z=\frac{-(a-3)}{(a-2)(a-3)} \Rightarrow \boxed{z=\frac{-1}{a-2}} \Rightarrow (a-1)y=-2-2z=$$

$$=-2+\frac{2}{a-2}=\frac{-2a+4+2}{a-2} \Rightarrow \boxed{y=\frac{-2a+6}{(a-1)(a-2)}} \Rightarrow x=-1-(a-1)y-z=-1+\frac{2a-6}{a-2}+\frac{1}{a-2}=$$

$$=\frac{-a+2+2a-6+1}{a-2} \Rightarrow \boxed{x=\frac{a-3}{a-2}}$$

---

1 3ªf-1ªf.

2 3ªf+2ªf.

3 Como no se puede dividir por cero, tenemos que calcular los valores del parámetro que anulan los coeficientes de las incógnitas que despejaremos luego (caso 4º).

4 3ªf-2ªf.

JUNIO DE 2017. PROBLEMA A2.

Dados el punto P(1,-1,0) y las rectas r y s, halla la ecuación general de un plano π que sea paralelo a ambas rectas y tal que la distancia de P a π sea 2:

$$r\equiv\begin{cases}2x-y-2z+1=0\\3x-y-4z+6=0\end{cases}\qquad s\equiv\frac{x-1}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+1}{1}$$

(2 PUNTOS)

Como la recta r está en el plano 2x-y-2z+1=0, el vector (2,-1,-2) es perpendicular a r.

Como la recta r también está en el plano 3x-y-4z+6=0, el vector (3,-1,-4) es perpendicular a r.

Por tanto, un vector direccional[1] de dicha recta es:

$$\vec{u}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&-1&-2\\3&-1&-4\end{vmatrix}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$$

Por otro lado, un vector direccional de la recta s es $\vec{v}=(1,0,1)$.

Como el plano π es paralelo a ambas rectas, un vector característico de dicho plano es:

$$\vec{w}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&2&1\\1&0&1\end{vmatrix}=2\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$$

Por tanto, $\pi\equiv 2x-y-2z+D=0$.

Por último, como la distancia del punto P(1,-1,0) al plano π es 2:

$$d(P,\pi)=2 \Rightarrow \frac{|2\cdot1-(-1)-2\cdot0+D|}{\sqrt{4+1+4}}=2 \Rightarrow |3+D|=6 \Rightarrow \begin{cases}3+D=6\\3+D=-6\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases}D=3\\D=-9\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\pi\equiv2x-y-2z+3=0\\\pi\equiv2x-y-2z-9=0\end{cases}$$

[1] Otra forma de obtener un vector direccional de la recta r es calculando sus ecuaciones paramétricas, esto es, resolviendo el sistema que forman los dos planos que la determinan.

JUNIO DE 2017. PROBLEMA A3.

Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+3x+1}-\sqrt{2x^2-5x+7}\right) \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+1}\left[\cos(\pi x)+2^x\right]^{1/\ln x}$$ (2 PUNTOS)

PRIMER LÍMITE:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{2x^2+3x+1}-\sqrt{2x^2-5x+7}\right) \overset{1}{=}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{2x^2+3x+1}-\sqrt{2x^2-5x+7}\right)\cdot\left(\sqrt{2x^2+3x+1}+\sqrt{2x^2-5x+7}\right)}{\sqrt{2x^2+3x+1}+\sqrt{2x^2-5x+7}} \overset{2}{=}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+3x+1-2x^2+5x-7}{\sqrt{2x^2+3x+1}+\sqrt{2x^2-5x+7}} \overset{3}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{8x-6}{\sqrt{2x^2+3x+1}+\sqrt{2x^2-5x+7}} \overset{4}{=}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cdot(8-6/x)}{x\cdot\left(\sqrt{2+3/x+1/x^2}+\sqrt{2-5/x+7/x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{8-6/x}{\sqrt{2+3/x+1/x^2}+\sqrt{2-5/x+7/x^2}}=$$

$$=\frac{8-0}{\sqrt{2+0+0}+\sqrt{2-0+0}}=\frac{8}{2\cdot\sqrt{2}}=\frac{4\cdot\sqrt{2}}{2}=2\cdot\sqrt{2}$$

SEGUNDO LÍMITE:

$$\lim_{x\to 1}\left[\cos(\pi x)+2^x\right]^{\frac{1}{\ln x}} \overset{5}{=} e^{\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x}\cdot\left[\cos(\pi x)+2^x-1\right]\right)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\cos(\pi x)+2^x-1}{\ln x}} \overset{6}{=} e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{-\pi\cdot\operatorname{sen}(\pi x)+2^x\cdot\ln 2}{1/x}} =$$

$$= e^{\frac{-\pi\cdot\operatorname{sen}(\pi\cdot 1)+2^1\cdot\ln 2}{1/1}} = e^{\frac{-\pi\cdot 0+2\cdot\ln 2}{1}} = e^{2\cdot\ln 2} \overset{7}{=} e^{\ln 4} \overset{8}{=} 4$$

1 Multiplicamos y dividimos por la expresión conjugada.
2 Operamos el numerador.
3 Simplificamos el numerador.
4 Sacamos x factor común en el numerador y en el denominador.
5 Ya que sale la indeterminación 1^∞.
6 Como sale la indeterminación 0/0, aplicamos L'Hôpital.
7 Por las propiedades de los logaritmos.
8 Por la definición de logaritmo.

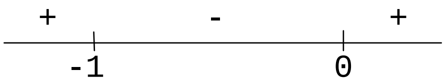
JUNIO DE 2017. PROBLEMA A4.

Demuestra que la función $f(x)=\text{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cdot\sqrt{x^2+x}$ tiene un máximo relativo en el intervalo (1,3). Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (3 PUNTOS)

1º) Como la condición necesaria de extremo relativo es que la derivada valga cero, se considera la función:

$$f'(x)=\frac{\pi}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cdot\sqrt{x^2+x}+\text{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cdot\frac{2x+1}{2\cdot\sqrt{x^2+x}}$$

Estudiamos el signo de $x^2+x=x(x+1)$:

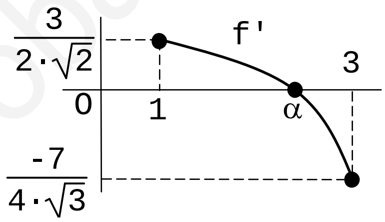


Por tanto, $Dom(f)=(-\infty,-1]\cup[0,+\infty)$ y $Dom(f')=(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$.

2º) Como la función f' satisface las condiciones del teorema de Bolzano, existe α en (1,3) tal que $f'(\alpha)=0$.

En efecto:

1ª) $f'(1)\cdot f'(3)<0$:



- $f'(1)=\frac{\pi}{2}\cdot 0\cdot\sqrt{2}+1\cdot\frac{3}{2\cdot\sqrt{2}}=\frac{3}{2\cdot\sqrt{2}}>0.$
- $f'(3)=\frac{\pi}{2}\cdot 0\cdot 2\sqrt{3}-1\cdot\frac{7}{4\cdot\sqrt{3}}=\frac{-7}{4\cdot\sqrt{3}}<0.$

2ª) f' es continua en [1,3]:

- $[1,3]\subset Dom(f')\subset Dom(f)$.
- Si $a\in[1,3]$:

$$\lim_{x\to a} f'(x)=\lim_{x\to a}\left[\frac{\pi}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cdot\sqrt{x^2+x}+\text{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cdot\frac{2x+1}{2\cdot\sqrt{x^2+x}}\right]=$$

$$=\left[\frac{\pi}{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi a}{2}\right)\cdot\sqrt{a^2+a}+\text{sen}\left(\frac{\pi a}{2}\right)\cdot\frac{2a+1}{2\cdot\sqrt{a^2+a}}\right]=f'(a)$$

3º) Ahora bien, como f es continua en α, por ser derivable en dicho punto, y f' es positiva a la izquierda y negativa a la derecha de α, entonces, por el criterio de la variación del signo de la primera derivada, f tiene en dicho punto un máximo relativo.

JUNIO DE 2017. PROBLEMA B1.

Calcula los valores del parámetro t para los que la siguiente matriz no es regular:

$$A=\begin{pmatrix} -t & t+1 & -t+1 \\ 1 & 0 & -t+1 \\ 2 & -t-1 & 1 \end{pmatrix}$$

(2 puntos)

Calculamos el determinante de la matriz A:

$$|A|=\begin{vmatrix} -t & t+1 & -t+1 \\ 1 & 0 & -t+1 \\ 2 & -t-1 & 1 \end{vmatrix} \overset{1}{=} \begin{vmatrix} -t+2 & 0 & -t+2 \\ 1 & 0 & -t+1 \\ 2 & -t-1 & 1 \end{vmatrix} \overset{2}{=} -(-t-1)\cdot\begin{vmatrix} -t+2 & -t+2 \\ 1 & -t+1 \end{vmatrix}=$$

$$=(t+1)\cdot(-t+2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -t+1 \end{vmatrix}=-(t+1)(t-2)\cdot(-t+1-1)=t(t+1)(t-2)$$

Para que la matriz A no sea regular su determinante debe ser cero:

$$|A|=0 \Rightarrow t(t+1)(t-2)=0 \Rightarrow t=0,\ t=-1,\ t=2$$

1 1ªf+3ªf.

2 Desarrollamos el determinante por los elementos de la segunda columna.

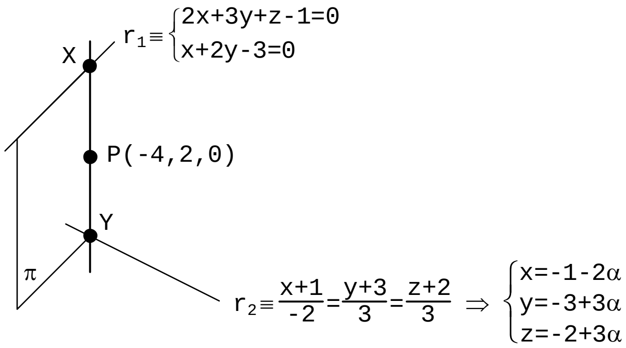
JUNIO DE 2017. PROBLEMA B2.

Encuentra la ecuación continua de la recta que pasa por el punto P(-4,2,0) y corta a las rectas

$$r_1 \equiv \begin{cases} 2x+3y+z-1=0 \\ x+2y-3=0 \end{cases} \quad \text{y} \quad r_2 \equiv \frac{x+1}{-2}=\frac{y+3}{3}=\frac{z+2}{3}$$

(3 PUNTOS)

Sean X e Y los puntos de corte de la recta buscada con r_1 y r_2, respectivamente:[1]



El punto P y la recta r_1 determinan el plano π. Como este plano pertenece al haz de planos de arista la recta r_1, tiene por ecuación:[2]

$$\pi \equiv a(2x+3y+z-1)+b(x+2y-3)=0$$

Como el punto P(-4,2,0) está en el plano π, satisface su ecuación:

$$a(-8+6+0-1)+b(-4+4-3)=0 \Rightarrow -3a-3b=0 \Rightarrow b=-a$$

Por tanto:

$$a(2x+3y+z-1)-a\cdot(x+2y-3)=0 \Rightarrow a(2x+3y+z-1-x-2y+3)=0 \overset{3}{\Rightarrow} \pi \equiv x+y+z+2=0$$

Como el punto Y está en la recta r_2:

$$Y(-1-2\alpha,-3+3\alpha,-2+3\alpha)$$

Como el punto Y está en el plano π, satisface su ecuación:

$$-1-2\alpha-3+3\alpha-2+3\alpha+2=0 \Rightarrow 4\alpha-4=0 \Rightarrow 4\alpha=4 \Rightarrow \alpha=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(-3,0,1) \Rightarrow [\overrightarrow{PY}]=(1,-2,1) \Rightarrow XY \equiv \frac{x+4}{1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z}{1}$$

---

[1] Otras formas de hacer este ejercicio pueden verse, por ejemplo, en el problema B2 del examen de selectividad de junio de 2007.

[2] Otra forma de obtener la ecuación de este plano consiste en hallar un punto y un vector direccional de la recta r_1.

[3] Como $a \neq 0$, podemos dividir los dos miembros por a. (Si a fuese 0, entonces b también valdría 0, ya que b=-a; pero a y b no pueden ser simultáneamente nulos.)

JUNIO DE 2017. PROBLEMA B3.

Encuentra los extremos absolutos de la función $f(x)=(x^2-3)\cdot e^{-x+2}$ en el intervalo $[-2,4]$. Menciona los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (2 Puntos)

1º) Estudiamos la continuidad de la función en el intervalo:

$$f'(x)=2x\cdot e^{-x+2}-(x^2-3)\cdot e^{-x+2}=e^{-x+2}\cdot(2x-x^2+3) \Rightarrow Dom(f')=Dom(f)=R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f \text{ es continua en } R \Rightarrow f \text{ es continua en } [-2,4]$$

Por el teorema de Weierstrass la función f alcanza en dicho intervalo sus extremos absolutos. Éstos se encuentran en los extremos del intervalo o entre sus extremos relativos.

2º) Calculamos los valores de f en los extremos del intervalo:

$$f(-2)=(4-3)\cdot e^4=e^4$$

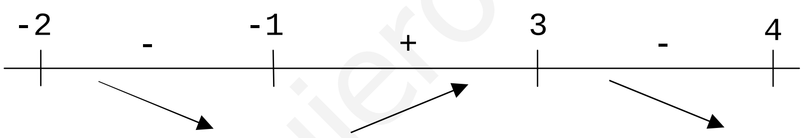
$$f(4)=(16-3)\cdot e^{-2}=13/e^2$$

3º) Hallamos los extremos relativos de la función en el intervalo:

Como la condición necesaria de extremo relativo es que la derivada valga cero:

$$f'(x)=0 \Rightarrow e^{-x+2}\cdot(2x-x^2+3)=0 \Rightarrow x^2-2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{2\pm4}{2}=\begin{cases}x=-1\\x=3\end{cases}$$

Estudiamos el signo de f' en el intervalo:



Como f es continua en x=-1 y x=3, por el criterio de la variación del signo de la derivada primera f tiene un mínimo relativo en el punto x=-1, que vale $y=f(-1)=-2\cdot e^3$, y un máximo relativo en el punto x=3, que vale $y=f(3)=6\cdot e^{-1}=6/e$.

4º) Conclusión:

La función f tiene en x=-2 un máximo absoluto que vale $y=e^4$; y en x=-1 un mínimo absoluto que vale $y=-2\cdot e^3$:

x	f(x)
-2	$e^4\simeq 54{,}598$
-1	$-2\cdot e^3\simeq -40{,}171$
3	$6/e\simeq 2{,}207$
4	$13/e^2\simeq 1{,}759$

JUNIO DE 2017. PROBLEMA B4.

Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de las funciones $f(x)=\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)$ y $g(x)=\frac{x^2}{4}-1$. Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

(3 Puntos)

1º) Resolvemos el sistema que forman las funciones que limitan por arriba y por abajo el recinto cuya área queremos hallar:

$$\begin{cases} y=\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) \\ y=\frac{x^2}{4}-1 \end{cases} \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)=\frac{x^2}{4}-1 \overset{1}{\Rightarrow} \begin{cases} x=-2 \\ x=2 \end{cases}$$

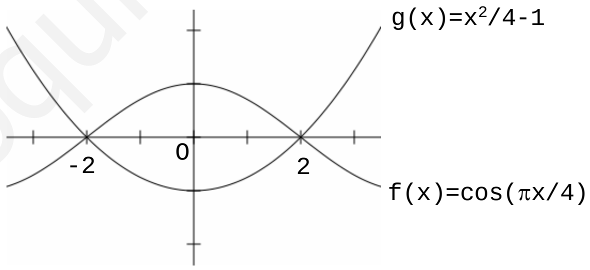
2º) Averiguamos entre -2 y 2 qué función está por encima y qué función está por debajo:

x	f(x)	g(x)
0	1	-1

3º) Calculamos el área:[2]

$$A=\int_{-2}^{2}\left[\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)-\frac{x^2}{4}+1\right]\cdot dx \overset{3}{=} \left[\frac{4}{\pi}\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{4}\right)-\frac{x^3}{12}+x\right]_{-2}^{2}=$$

$$=\left[\left(\frac{4}{\pi}\cdot 1-\frac{8}{12}+2\right)-\left(\frac{4}{\pi}\cdot(-1)+\frac{8}{12}-2\right)\right]=\frac{4}{\pi}-\frac{2}{3}+2+\frac{4}{\pi}-\frac{2}{3}+2=\frac{8}{\pi}+\frac{8}{3}=\frac{24+8\pi}{3\pi}$$



1 Esta ecuación se resuelve a ojo.
2 Si se repara en que la función integrando es una función par, puede calcularse la integral entre 0 y 2, y multiplicar el resultado por 2.
3 La integral del primer sumando es casi inmediata de tipo seno y las integrales de los otros dos son inmediatas de tipo potencial.