Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2019-2020

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Realiza cuatro preguntas de las ocho que se presentan

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} \left(a^2-2\right)x+2y+z=a+2 \\ \left(a^2-2\right)x+4y+\left(a+1\right)z=a+6 \\ \left(a^2-2\right)x+2y+\left(2-a\right)z=a+\sqrt{2} \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

P2) El plano π pasa por los puntos $P_1(2,0,5)$, $P_2(1,-2,2)$ *y* $P_3(3,-1,2)$. Una esfera con centro en $C(0,1,-3)$ toca al plano en un único punto. Calcula el radio de la esfera y el punto de intersección.

(2.5 puntos)

P3) Calcula las integrales indefinidas:

$$\int \frac{x-7}{x^2+x-6}\,dx$$ (1.25 puntos)

$$\int e^{2x}\sin\left(2x+1\right)dx$$ (1.25 puntos)

P4) Sea la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{3}+\ln\dfrac{x^2+2}{3} & x<1 \\ \dfrac{x^2}{3} & x\geq 1 \end{cases}$.

a) Demuestra que la función es derivable en todo $\mathbb{R}$. (1 punto)
b) Demuestra que existe un valor $\alpha\in(0,2)$ tal que $f\,'(\alpha)=1$. Enuncia el (los) resultado(s) teórico(s) utilizado(s) y justifica su uso. (1.5 puntos)

P5) Sabiendo que la inversa de una matriz A es $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y la inversa de la matriz $A \cdot B$ es $\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, determina la matriz *B*.

(2.5 puntos)

P6) Calcula la ecuación continua de la recta *t* sabiendo que corta perpendicularmente a las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x+2y+z-1=0 \\ x+3z-7=0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x+2}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+3}{0}$$

(2.5 puntos)

P7) Calcula los extremos absolutos de la función $f(x) = e^{\pi x} \cdot \sin \pi x$ en el intervalo $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

P8) Sean las funciones $f(x) = \frac{x}{2} + 1$ y $g(x) = \sqrt{x-2} + 2$. Encuentra los dos puntos en los que se cortan sus gráficas, y calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

(2.5 puntos)

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2019-2020

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Criterios de corrección y calificación

Criterios generales

La duración de la prueba es de 90 minutos. Se calificará de 0 a 10 puntos, redondeando a cuartos de punto.

- Se debe responder **exclusivamente** a cuatro de los problemas planteados. Si alguien responde a más de cuatro, solo se sumarán las cuatro peores puntuaciones.

- Se tendrá en cuenta el planteamiento seguido para la resolución del problema y la claridad en la exposición. Si es pertinente, se valorará la referencia a los resultados teóricos usados.

- Para la penalización de los errores en los cálculos, se tendrá en cuenta:
  - Si son consecuencia de no haber seguido el procedimiento más adecuado.
  - Si reflejan fallos de concepto.
  - Si producen simplificaciones relevantes.
  - Si ocurren con reiteración.

Criterios específicos

P1) Se valorará con 1.5 puntos la discusión completa, incluyendo la mención del teorema, 0,5 puntos la solución del caso compatible determinado y 0.5 puntos la del caso compatible indeterminado.

P4) En el apartado (b) se valorará sobre 0.5 puntos el estudio de la continuidad y con 0.5 puntos el de la derivabilidad. En el apartado (b) se valorará sobre 0.75 puntos el enunciado del (de los) resultado(s) teórico(s) requerido(s). Se valorará sobre o.75 untos la justificación de su uso.

P7) Se valorará sobre 1 punto el enunciado del resultado teórico requerido. Se valorará sobre 1.5 puntos la justificación de su uso.

P8) Se valorará con 0.5 puntos la obtención de los puntos de corte, con 0,5 puntos el dibujo de la gráfica (aunque no sea muy detallado) y con 1,5 puntos el cálculo del área. Si la resolución es correcta, se puede obtener la máxima puntuación aunque no incluya dibujo.

SOLUCIONES

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} \left(a^2-2\right)x+2y+z=a+2 \\ \left(a^2-2\right)x+4y+\left(a+1\right)z=a+6 \\ \left(a^2-2\right)x+2y+\left(2-a\right)z=a+\sqrt{2} \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2.5 puntos)

Utilizamos el método de Gauss para discutir el sistema.

$$\begin{cases} \left(a^2-2\right)x+2y+z=a+2 \\ \left(a^2-2\right)x+4y+\left(a+1\right)z=a+6 \\ \left(a^2-2\right)x+2y+\left(2-a\right)z=a+\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \text{Ecuación } 2^{\text{a}} - \text{ Ecuación } 1^{\text{a}} \\ \left(a^2-2\right)x+4y+\left(a+1\right)z=a+6 \\ \underline{-\left(a^2-2\right)x-2y-z=-a-2} \\ 2y+az=4 \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{c} \text{Ecuación } 3^{\text{a}} - \text{ Ecuación } 1^{\text{a}} \\ \left(a^2-2\right)x+2y+\left(2-a\right)z=a+\sqrt{2} \\ \underline{-\left(a^2-2\right)x-2y-z=-a-2} \\ \left(1-a\right)z=\sqrt{2}-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \left(a^2-2\right)x+2y+z=a+2 \\ 2y+az=4 \\ \left(1-a\right)z=\sqrt{2}-2 \end{cases}$$

Comprobamos cuando se anulan los elementos de la diagonal principal del sistema.
La diagonal se anula en $a = 1$ y en $a^2-2=0 \Rightarrow a=\pm\sqrt{2}$

Nos planteamos cuatro situaciones que estudiamos por separado.

CASO 1. $a\neq\sqrt{2};\, a\neq-\sqrt{2}\ y\ a\neq 1$

En este caso ninguno de los elementos de la diagonal se anula y podré determinar los valores únicos de la solución.

El sistema es **compatible determinado**.
Lo resolvemos.

$$\begin{cases} \left(a^2-2\right)x+2y+z=a+2 \\ 2y+az=4 \\ \left(1-a\right)z=\sqrt{2}-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(a^2-2\right)x+2y+z=a+2 \\ 2y+az=4 \\ \boxed{z=\dfrac{\sqrt{2}-2}{1-a}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(a^2-2\right)x+2y+\dfrac{\sqrt{2}-2}{1-a}=a+2 \\ 2y=4-a\dfrac{\sqrt{2}-2}{1-a} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(a^2-2\right)x+2y=a+2-\dfrac{\sqrt{2}-2}{1-a} \\ 2y=\dfrac{4-4a-\sqrt{2}a+2a}{1-a} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left(a^2-2\right)x+2y=a+2-\dfrac{\sqrt{2}-2}{1-a} \\ \boxed{y=\dfrac{4-2a-\sqrt{2}a}{2(1-a)}} \end{cases} \Rightarrow \left(a^2-2\right)x+\cancel{2}\dfrac{4-2a-\sqrt{2}a}{\cancel{2}(1-a)}=a+2-\dfrac{\sqrt{2}-2}{1-a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(a^2-2\right)x=a+2-\frac{\sqrt{2}-2}{1-a}-\frac{4-2a-\sqrt{2}a}{1-a} \Rightarrow \left(a^2-2\right)x=a+2-\frac{\sqrt{2}-2+4-2a-\sqrt{2}a}{1-a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(a^2-2\right)x=a+2-\frac{\sqrt{2}+2-2a-\sqrt{2}a}{1-a} \Rightarrow \left(a^2-2\right)x=a+2-\frac{\left(2+\sqrt{2}\right)-a\left(2+\sqrt{2}\right)}{1-a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(a^2-2\right)x=a+2-\frac{\cancel{(1-a)}\left(2+\sqrt{2}\right)}{\cancel{1-a}} \Rightarrow \left(a^2-2\right)x=a+2-2-\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(a^2-2\right)x=a-\sqrt{2} \Rightarrow x=\frac{a-\sqrt{2}}{a^2-2}=\frac{a-\sqrt{2}}{\left(a-\sqrt{2}\right)\left(a+\sqrt{2}\right)}=\boxed{\frac{1}{a+\sqrt{2}}=x}$$

La solución es $\boxed{x=\dfrac{1}{a+\sqrt{2}}; \quad y=\dfrac{4-a\left(2+\sqrt{2}\right)}{2(1-a)}; \quad z=\dfrac{\sqrt{2}-2}{1-a}}$

CASO 2. $a=\sqrt{2}$

En este caso el sistema queda:

$$\begin{cases} 2y+z=\sqrt{2}+2 \\ 2y+\sqrt{2}z=4 \\ \left(1-\sqrt{2}\right)z=\sqrt{2}-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y+z=\sqrt{2}+2 \\ 2y+\sqrt{2}z=4 \\ \boxed{z=\dfrac{\sqrt{2}-2}{1-\sqrt{2}}=\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y+\sqrt{2}=\sqrt{2}+2 \\ 2y+\sqrt{2}\sqrt{2}=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y=2 \\ 2y+2=4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y=1}$$

El sistema es **compatible indeterminado**.

Sus soluciones son $\boxed{x=t; \quad y=1; \quad z=\sqrt{2}}$

CASO 3. $a=-\sqrt{2}$

En este caso el sistema queda:

$$\begin{cases} 2y+z=-\sqrt{2}+2 \\ 2y-\sqrt{2}z=4 \\ \left(1+\sqrt{2}\right)z=\sqrt{2}-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y+z=-\sqrt{2}+2 \\ 2y-\sqrt{2}z=4 \\ \boxed{z=\dfrac{\sqrt{2}-2}{1+\sqrt{2}}=4+\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y+4+\sqrt{2}=-\sqrt{2}+2 \\ 2y-\sqrt{2}\left(4+\sqrt{2}\right)=4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2y=-2\sqrt{2}-2 \\ 2y-4\sqrt{2}-2=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y=-2\sqrt{2}-2 \\ 2y=4\sqrt{2}+6 \end{cases} \text{ No es posible}$$

El sistema es **incompatible**

CASO 4. $a=1$

En este caso el sistema queda:

$$\begin{cases} (1-2)x+2y+z=3 \\ 2y+z=4 \\ 0=\sqrt{2}-2 \end{cases} \Rightarrow \text{Es imposible}$$

El Sistema es incompatible.

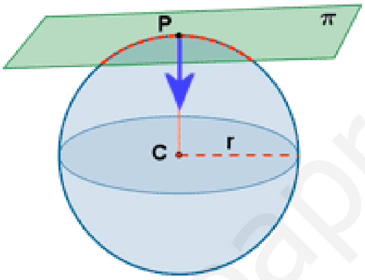
P2) El plano π pasa por los puntos $P_1(2,0,5)$, $P_2(1,-2,2)$ y $P_3(3,-1,2)$. Una esfera con centro en $C(0,1,-3)$ toca al plano en un único punto. Calcula el radio de la esfera y el punto de intersección.

(2.5 puntos)

Hallamos primero la ecuación del plano.

$$\left.\begin{array}{l} P_1(2,0,5)\in\pi \\ \overrightarrow{P_2P_1}=(2,0,5)-(1,-2,2)=(1,2,3) \\ \overrightarrow{P_2P_3}=(3,-1,2)-(1,-2,2)=(2,1,0) \end{array}\right\}\Rightarrow \pi\equiv\begin{vmatrix} x-2 & y & z-5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0$$

$$6y+z-5-4z+20-3x+6=0\Rightarrow -3x+6y-3z+21=0\Rightarrow \boxed{\pi\equiv x-2y+z-7=0}$$



Hallamos la recta perpendicular al plano que pasa por el punto C. Después determinamos el punto de corte de plano y recta (P) y el radio es el módulo del vector que une C y P.

La recta tiene como vector director el normal del plano.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}=\vec{n}=(1,-2,1) \\ C(0,1,-3)\in r \end{array}\right\}\Rightarrow r\equiv\left.\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=1-2\lambda \\ z=-3+\lambda \end{array}\right\}$$

Hallamos el punto P de intersección de plano y recta.

$$\left.\begin{array}{l} \pi\equiv x-2y+z-7=0 \\ r\equiv\left.\begin{array}{l} x=\lambda \\ y=1-2\lambda \\ z=-3+\lambda \end{array}\right\} \end{array}\right\}\Rightarrow \lambda-2(1-2\lambda)-3+\lambda-7=0\Rightarrow \lambda-2+4\lambda-3+\lambda-7=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\lambda=12\Rightarrow\lambda=2\Rightarrow\left.\begin{array}{l} x=2 \\ y=1-4=-3 \\ z=-3+2=-1 \end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{P(2,-3,-1)}$$

El radio de la esfera es la distancia de C a P, el módulo del vector $\overrightarrow{PC}$.

$$\overrightarrow{PC}=(0,1,-3)-(2,-3,-1)=(-2,4,-2)$$

$$Radio=d(P,C)=\left|\overrightarrow{PC}\right|=\sqrt{(-2)^2+4^2+(-2)^2}=\sqrt{24}=\boxed{2\sqrt{6}=Radio}$$

También se puede hallar el radio como la distancia de C al plano π.

$$\left.\begin{array}{l} \pi\equiv x-2y+z-7=0 \\ C(0,1,-3) \end{array}\right\}\Rightarrow Radio=d(C,\pi)=\frac{|0-2-3-7|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}}=\frac{12}{\sqrt{6}}=\frac{12\sqrt{6}}{6}=\boxed{2\sqrt{6}}$$

P3) Calcula las integrales indefinidas:

$$\int \frac{x-7}{x^2+x-6}\,dx \qquad (1.25 \text{ puntos})$$

$$\int e^{2x}\sin(2x+1)\,dx \qquad (1.25 \text{ puntos})$$

Primera integral

$$\int \frac{x-7}{x^2+x-6}\,dx =$$

Descomposición en fracciones simples

$$x^2+x-6=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\begin{cases}\frac{-1+5}{2}=2\\ \frac{-1-5}{2}=-3\end{cases} \Rightarrow x^2+x-6=(x-2)(x+3)$$

$$\frac{x-7}{x^2+x-6}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3}$$

$$x-7=A(x+3)+B(x-2)$$

$$x=2 \to 2-7=5A \to A=-1$$

$$x=-3 \to -3-7=B(-5) \to B=2$$

$$\frac{x-7}{x^2+x-6}=\frac{-1}{x-2}+\frac{2}{x+3}$$

$$=\int \frac{-1}{x-2}+\frac{2}{x+3}\,dx=\boxed{-\ln|x-2|+2\ln|x+3|+C}$$

Segunda integral

$$\int e^{2x}\sin(2x+1)\,dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=\sin(2x+1)\to du=2\cos(2x+1)\,dx\\ dv=e^{2x}dx\to v=\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\sin(2x+1)-\int\frac{1}{2}e^{2x}2\cos(2x+1)\,dx=\frac{1}{2}e^{2x}\sin(2x+1)-\int e^{2x}\cos(2x+1)\,dx=$$

$$=\left\{\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ u=\cos(2x+1)\to du=-2\sin(2x+1)\,dx\\ dv=e^{2x}dx\to v=\int e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\sin(2x+1)-\left[\frac{1}{2}e^{2x}\cos(2x+1)-\int\frac{1}{2}e^{2x}\left(-2\sin(2x+1)\right)dx\right]=$$

$$=\frac{1}{2}e^{2x}\sin(2x+1)-\frac{1}{2}e^{2x}\cos(2x+1)-\int e^{2x}\sin(2x+1)\,dx$$

Hemos conseguido :

$$\int e^{2x}\sin(2x+1)\,dx=\frac{1}{2}e^{2x}\sin(2x+1)-\frac{1}{2}e^{2x}\cos(2x+1)-\int e^{2x}\sin(2x+1)\,dx$$

Despejando :

$$2\int e^{2x}\sin(2x+1)\,dx=\frac{1}{2}e^{2x}\sin(2x+1)-\frac{1}{2}e^{2x}\cos(2x+1)$$

$$\boxed{\int e^{2x}\sin(2x+1)\,dx=\frac{e^{2x}}{4}\left(\sin(2x+1)-\cos(2x+1)\right)+C}$$

P4) Sea la función $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{3}+\ln\frac{x^2+2}{3} & x<1 \\ \frac{x^2}{3} & x\geq 1 \end{cases}$.

a) Demuestra que la función es derivable en todo $\mathbb{R}$. (1 punto)

b) Demuestra que existe un valor $\alpha\in(0,2)$ tal que $f'(\alpha)=1$. Enuncia el (los) resultado(s) teórico(s) utilizado(s) y justifica su uso. (1.5 puntos)

a) El dominio de definición es $\mathbb{R}$.
La función polinómica y el logaritmo neperiano de una expresión que siempre es positiva es continua, por lo que es continua en $\mathbb{R}-\{1\}$.
Comprobemos si es continua en $x=1$.

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=\frac{1}{3} \\ \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{3}+\ln\frac{x^2+2}{3}=\frac{1}{3}+\ln 1=\frac{1}{3} \\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2}{3}=\frac{1}{3} \end{array}\right\}\Rightarrow$$ Son iguales y *f(x)* es continua en $x=1$

La función en $\mathbb{R}-\{1\}$ es derivable pues cada una de sus funciones lo es en su dominio.

Siendo $f'(x)=\begin{cases} \dfrac{\frac{2x}{3}}{\frac{x^2+2}{3}}=\dfrac{2x}{x^2+2} & x<1 \\ \dfrac{2x}{3} & x>1 \end{cases}$.

Veamos si es derivable en $x=1$. Calculamos sus derivadas laterales y comprobamos si coinciden.

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=\frac{2\cdot 1}{1^2+2}=\frac{2}{3} \\ f'(1^+)=\frac{2\cdot 1}{3}=\frac{2}{3} \end{array}\right\}\Rightarrow f'(1^-)=\frac{2}{3}=f'(1^+)$$

La función es derivable en $x=1$ y su derivada es $f'(1)=\frac{2}{3}$.

La función es derivable en $\mathbb{R}$ y su derivada es:

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{2x}{x^2+2} & x<1 \\ \dfrac{2x}{3} & x\geq 1 \end{cases}$$

b) Consideramos la función $g(x)=f'(x)-1$. Esta función es continua en el intervalo $(0,2)$.

$g(0) = f\,'(0) - 1 = \frac{0}{0^2+2} - 1 = -1 < 0$ y $g(2) = f\,'(2) - 1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3} > 0$.

Podemos aplicar el teorema de Bolzano siendo $g(x) = f\,'(x) - 1$ continua en $(0,2)$ y tomando valores de distinto signo en cada extremo del intervalo (*g(0) < 0* y *g(2) > 0*) entonces existe $\alpha \in (0,2)$ tal que $g(\alpha) = 0$.

Por lo que existe $\alpha \in (0,2)$ tal que $g(\alpha) = f\,'(\alpha) - 1 = 0 \Rightarrow f\,'(\alpha) = 1$

P5) Sabiendo que la inversa de una matriz *A* es $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y la inversa de la matriz $A \cdot B$ es $\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, determina la matriz *B*. (2.5 puntos)

Sabemos que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y que $(A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ por lo que :

$$A \cdot B (A \cdot B)^{-1} = I \Rightarrow A \cdot B \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = I$$

Si multiplicamos por la inversa de A en la igualdad anterior.

$$A^{-1} \cdot I = A^{-1} \cdot A \cdot B \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = I \cdot B \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = B \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Si\ B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} tenemos\ que$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6a + b & a \\ -6c + d & c \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2 = -6a + b \\ -1 = a \\ -1 = -6c + d \\ 1 = c \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2 = 6 + b \\ -1 = a \\ -1 = -6 + d \\ 1 = c \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -4 = b \\ -1 = a \\ 5 = d \\ 1 = c \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}}$$

P6) Calcula la ecuación continua de la recta t sabiendo que corta perpendicularmente a las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x+2y+z-1=0 \\ x+3z-7=0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x+2}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+3}{0} \qquad \text{(2.5 puntos)}$$

Pasamos la ecuación de r a paramétricas.

$$r \equiv \begin{cases} x+2y+z-1=0 \\ x+3z-7=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+z-1=0 \\ x=7-3z \end{cases} \Rightarrow 7-3z+2y+z-1=0 \Rightarrow 2y=-6+2z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=-3+z \Rightarrow r \equiv \left. \begin{array}{l} x=7-3\lambda \\ y=-3+\lambda \\ z=\lambda \end{array} \right\}$$

El vector director de r es $\vec{v_r}=(-3,1,1)$ y un punto de la recta es $P_r(7,-3,0)$

El vector director de s es $\vec{v_s}=(2,1,0)$ y un punto de la recta es $P_s(-2,0,-3)$

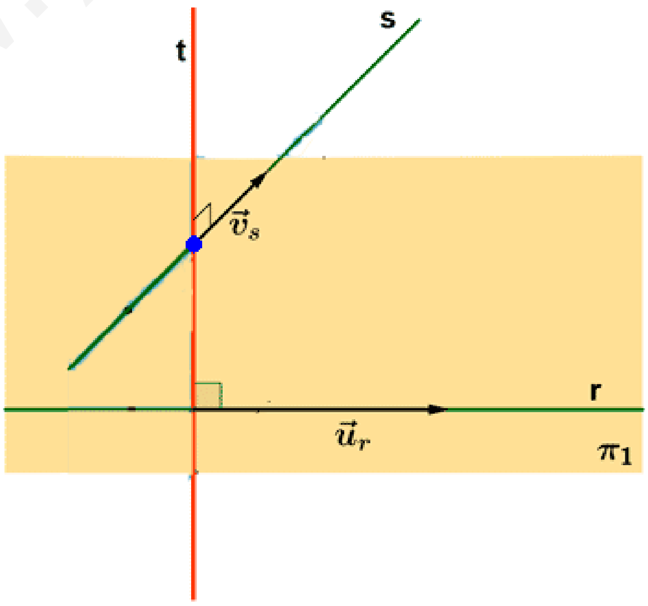
Veamos la posición relativa de las rectas r y s.
Sus vectores directores no tienen coordenadas proporcionales:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v_r}=(-3,1,1) \\ \vec{v_s}=(2,1,0) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{-3}{2} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{1}{0}$$

, luego ni son paralelas ni coincidentes.
Para ver si se cortan (son coplanarias y coinciden en un punto) o se cruzan (no son coplanarias) tomamos los vectores $\vec{v_r}=(-3,1,1)$, $\vec{v_s}=(2,1,0)$ y $\overrightarrow{P_rP_s}=(-2,0,-3)-(7,-3,0)=(-9,3,-3)$.
Su producto mixto es:

$$\left[\vec{v_r},\vec{v_s},\overrightarrow{P_rP_s}\right]=\begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -9 & 3 & -3 \end{vmatrix}=9+6+9+6=30 \neq 0$$

Al ser distinto de cero las rectas se cruzan.



Hallo el vector director de la recta t con el producto vectorial de los vectores directores de r y s.

$$\overrightarrow{v_t}=\overrightarrow{v_r}\times\overrightarrow{v_s}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}=2j-3k-2k-i=-i+2j-5k=(-1,2,-5)$$

Hallo la ecuación del π_1 que contiene a la recta *r* y tiene como segundo vector director $\overrightarrow{v_t}$.

$$\left.\begin{array}{l} P_r(7,-3,0)\in\pi_1 \\ \overrightarrow{v_r}=(-3,1,1) \\ \overrightarrow{v_t}=(-1,2,-5) \end{array}\right\}\Rightarrow \pi_1\equiv\begin{vmatrix} x-7 & y+3 & z \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -5 \end{vmatrix}=0$$

$$-5x+35-y-3-6z+z-15y-45-2x+14=0\Rightarrow \boxed{\pi_1\equiv -7x-16y-5z+1=0}$$

El punto de corte del plano π_1 y la recta *s* será un punto de la recta *t*.

$$\left.\begin{array}{l} \pi_1\equiv -7x-16y-5z+1=0 \\ s\equiv\left.\begin{cases} x=-2+2\lambda \\ y=\lambda \\ z=-3 \end{cases}\right\} \end{array}\right\}\Rightarrow -7(-2+2\lambda)-16\lambda+15+1=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 14-14\lambda-16\lambda+15+1=0\Rightarrow -30\lambda=-30\Rightarrow \lambda=1\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-2+2=0 \\ y=1 \\ z=-3 \end{array}\right\}\Rightarrow P_t(0,1,-3)$$

Tenemos el vector director $\overrightarrow{v_t}=(-1,2,-5)$ y un punto de la recta $P_t(0,1,-3)$. Su ecuación es:

$$\left.\begin{array}{l} P_t(0,1,-3) \\ \overrightarrow{v_t}=(-1,2,-5) \end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{t\equiv\frac{x}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+3}{-5}}$$

P7) Calcula los extremos absolutos de la función $f(x)=e^{\pi x}\cdot\sin\pi x$ en el intervalo $\left[\frac{1}{2},2\right]$. Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2.5 puntos)

Derivamos la función y averiguamos sus puntos críticos.

$$f(x)=e^{\pi x}\cdot\sin\pi x \Rightarrow f'(x)=\pi e^{\pi x}\cdot\sin\pi x+\pi e^{\pi x}\cdot\cos\pi x=\pi e^{\pi x}\left(\sin\pi x+\cos\pi x\right)$$

$$f'(x)=0\Rightarrow \pi e^{\pi x}\left(\sin\pi x+\cos\pi x\right)=0\Rightarrow \sin\pi x+\cos\pi x=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\pi x=-\cos\pi x\Rightarrow \frac{\sin\pi x}{\cos\pi x}=-\frac{\cos\pi x}{\cos\pi x}\Rightarrow tg\pi x=-1\Rightarrow \pi x=\frac{3\pi}{4}+k\pi;\quad k\in\mathbb{N}$$

$$x=\frac{3}{4}+k;\quad k\in\mathbb{N}$$

Como nos limitamos al intervalo $\left[\frac{1}{2},2\right]$ nos sirven, $x=\frac{3}{4}+1=\frac{7}{4}$

$$f'(x)=\pi e^{\pi x}\left(\sin\pi x+\cos\pi x\right)\Rightarrow f''(x)=\pi^2 e^{\pi x}\left(\sin\pi x+\cos\pi x\right)+\pi^2 e^{\pi x}\left(\cos\pi x-\sin\pi x\right)$$

$$f''(x)=\pi^2 e^{\pi x}\left(\sin\pi x+\cos\pi x+\cos\pi x-\sin\pi x\right)=2\pi^2 e^{\pi x}\cos\pi x$$

$$f''\left(\frac{3}{4}\right)=2\pi^2 e^{\pi\frac{3}{4}}\cos\pi\frac{3}{4}<0 \ \rightarrow \text{En } x=\frac{3}{4} \text{ hay un máximo relativo}$$

$$f''\left(\frac{7}{4}\right)=2\pi^2 e^{\pi\frac{3}{4}}\cos\pi\frac{7}{4}>0 \ \rightarrow \text{En } x=\frac{7}{4} \text{ hay un mínimo relativo}$$

Veamos el valor de la función en estos puntos críticos y en los extremos del intervalo para obtener los máximos y mínimos absolutos en $\left[\frac{1}{2},2\right]$.

Extremo inferior del intervalo → $f\left(\frac{1}{2}\right)=e^{\pi\frac{1}{2}}\cdot\sin\pi\frac{1}{2}=e^{\pi\frac{1}{2}}=4.81$

Máximo relativo → $f\left(\frac{3}{4}\right)=e^{\pi\frac{3}{4}}\cdot\sin\pi\frac{3}{4}=7.46$

Mínimo relativo → $f\left(\frac{7}{4}\right)=e^{\pi\frac{7}{4}}\cdot\sin\pi\frac{7}{4}=-172.64$

Extremo superior del intervalo → $f(2)=e^{2\pi}\cdot\sin 2\pi=0$

El máximo relativo $x=\frac{3}{4}$ es máximo absoluto en el intervalo $\left[\frac{1}{2},2\right]$

El mínimo relativo $x=\frac{7}{4}$ también lo es absoluto.

P8) Sean las funciones $f(x)=\frac{x}{2}+1$ y $g(x)=\sqrt{x-2}+2$. Encuentra los dos puntos en los que se cortan sus gráficas, y calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas. (2.5 puntos)

$$f(x)=g(x)\Rightarrow\frac{x}{2}+1=\sqrt{x-2}+2\Rightarrow\frac{x}{2}-1=\sqrt{x-2}\Rightarrow\frac{x-2}{2}=\sqrt{x-2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\frac{x-2}{2}\right)^2=\left(\sqrt{x-2}\right)^2\Rightarrow\frac{x^2-4x+4}{4}=x-2\Rightarrow x^2-4x+4=4x-8\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-8x+12=0\Rightarrow x=\frac{8\pm\sqrt{64-48}}{2}=\begin{cases}\frac{8+4}{2}=6=x\\ \frac{8-4}{2}=2=x\end{cases}$$

Lo comprobamos:

$$\left.\begin{array}{l}f(6)=\frac{6}{2}+1=4\\ g(6)=\sqrt{6-2}+2=2+2=4\end{array}\right\}\Rightarrow f(6)=g(6)=4$$

$$\left.\begin{array}{l}f(2)=\frac{2}{2}+1=2\\ g(2)=\sqrt{2-2}+2=2\end{array}\right\}\Rightarrow f(2)=g(2)=2$$

Se cortan en (6, 4) y en (2, 2)

Como $f(4)=\frac{4}{2}+1=3$ y $g(4)=\sqrt{4-2}+2=2+\sqrt{2}=3.4142$ la función *g(x)* está por encima de la función *f(x)* en el intervalo (2, 6).

El área es la integral definida entre $x=2$ y $x=6$ de $g(x)-f(x)$.

$$Área=\int_2^6\sqrt{x-2}+2-\left(\frac{x}{2}+1\right)dx=\int_2^6\sqrt{x-2}+1-\frac{x}{2}dx=\int_2^6(x-2)^{\frac{1}{2}}+1-\frac{1}{2}xdx=$$

$$=\left[\frac{(x-2)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+x-\frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\right]_2^6=\left[\frac{2}{3}\sqrt{(x-2)^3}+x-\frac{x^2}{4}\right]_2^6=$$

$$=\left[\frac{2}{3}\sqrt{(6-2)^3}+6-\frac{6^2}{4}\right]-\left[\frac{2}{3}\sqrt{(2-2)^3}+2-\frac{2^2}{4}\right]=\frac{16}{3}+6-9-2+1=\boxed{\frac{4}{3}u^2}$$